Kontribusi Untuk Ilmu Ekonomi
Seri Permodelan I

MEMAHAMI MODEL DAN INSTRUMEN PEMODELAN

Penulis:

Drs. Munrokhim Misanam, MA.Ec., Ph.D.

Penerbit:

UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA

2024

Kontribusi Untuk Ilmu Ekonomi
Seri Permodelan I

Memahami Model dan Instrumen Pemodelan

Penulis: Drs. Munrokhim Misanam, MA.Ec., Ph.D.

Penata Letak : Bayu Putra Pamungkas
Sampul : Bayu Putra Pamungkas

Ukuran : 16 cm x 23 cm
Jumlah Halaman: x + 202

Cetakan I
Januari 2024M / Jumadil Akhir 1445 H

ISBN : 978-602-450-876-0
E-ISBN : 978-602-450-877-7 (PDF)

Penerbit:

UNIVERSITAS
ISLAM
INDONESIA

Kampus Terpadu UII
Jl. Kaliurang Km 14,5 Yogyakarta 55584
Tel. (0274) 898 444 Ext. 2301; Fax. (0274) 898 444 psw 2091
http://library.uii.ac.id/penerbit; e-mail: penerbit@uii.ac.id

Anggota IKAPI, Yogyakarta

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan seri pertama dari dua seri yang direncanakan. Buku ini ditulis dengan latar belakang bahwa pada perkembangan belakangan ini ilmu ekonomi mengembangkan berbagai teori baru dengan pendekatan matematika yang sangat intensif. Hampir semua teori baru dalam ilmu ekonomi belakangan ini diekspresikan dengan model matematis. Untuk itu mereka yang menyukai pengembangan pemikiran/keilmuan di bidang ekonomi sangatlah membutuhkan suatu instrumen untuk membangun model untuk kemudian melakukan analisis atasnya yang darinya bisa ditemukan aturan-aturan baru dalam setiap area. Buku ini adalah suatu referensi yang darinya seseorang bisa memperoleh gambaran bagaimana memahami model dan pemodelan serta membangun model yang dimaksudkan.

Bagian pertama dari buku ini membicarakan mengenai jenis-jenis model dari semua model yang ada. Sementara bagian keduanya membicarakan masalah instrumen-instrumen yang biasa dipakai dalam pemodelan. Dengan rangkaian konten seperti ini pembaca diharapkan sudah akan mampu mengenali berbagai jenis model beserta instrumen yang digunakan untuk melakukan pemodelan. Selanjutnya mereka akan bisa terbantu ketika membaca bahan bacaan baik dari journal maupun buku referensi yang biasanya menyajikan berbagai model baru yang belum pernah dikenali sebelumnya.

Ucapan terima kasih penulis haturkan kepada para kolega atas waktu yang telah diluangkan untuk memberikan umpan balik dalam penyelesaian buku ini. Saya juga mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang tidak bisa saya sebut satu persatu yang telah memberi support atas penulisan dan penerbitan buku ini.

Saya juga merasa berhutang budi kepada Uiversitas Islam Indonesia yang telah memberikan dukungan yang begitu besar kepada penulisan dan penerbitan buku ini. Semoga buku ini menjadi rujukan/ referensi bagi para aktivis pemodelan dan para akademisi dalam menjalankan profesinya.

Yogyakarta, Agustus 2023

Penulis

DAFTAR ISI

DESKRIPSI DAN PENGERTIAN MODEL DAN PEMODELAN

1.1. MODEL

Model biasa dimaknai sebagai sesuatu yang digunakan untuk melakukan simplifikasi dari suatu keadaan yang dianggap kompleks. Sebagai misal adalah bagaimana gambaran mengenai masyarakat yang beradab itu? Di sini daripada harus menggambarkan secara komplit mengenai detil dari spesifikasi masyarakat yang dimaksud, orang bisa menunjuk suatu negara atau daerah tertentu di dunia ini yang paling pas bisa menggambarkan keadaan dari masyarakat yang dimaksud. Begitu juga ketika orang ingin memberikan gambaran spesifikasi yang sangat kompleks mengenai sosok pemimpin yang ideal orang bisa menunjuk pada pribadi dari tokoh tertentu yang dianggap mewakili spesifikasi ini. Dalam kasus seperti ini model dimaknai sebagai contoh.

Dalam kasus yang lain orang berusaha merepresentasikan sesuatu dengan cara menggambarkan secara detil sesuatu tersebut. Dalam hal ini gambar anatomi tubuh manusia adalah merupakan model untuk memahami bagaimana bagian tubuh yang satu berhubungan bagian tubuh yang lain. Senada dengan hal ini adalah peta-peta kuno yang dibuat manusia yang mencoba menggambarkan bagaimana posisi dan tata letak suatu tempat relatif terhadap tempat-tempat lain yang ada. Termasuk dalam kelompok ini adalah ketika seseorang berusaha merepresentasikan secara detil dan teliti atas sesuatu dalam bentuk tiga dimensi yang mana bentuk dan dimensinya adalah persis sama seperti bentuk yang sebenarnya. Hal ini kemudian disebut prototype, ada juga yang menyebutnya sebagai maket.

Dalam kasus yang lain yang sering terjadi adalah di mana seseorang menghadapi adanya suatu kerumitan yang dihadapi yang berasal dari hubungan kait mengait dari satu keadaan dengan keadaan lainya baik yang langsung mengikuti maupun dalam selang beberapa waktu berikutnya. Adakalanya terdapat hubungan secara bersamaan yang susah dijelaskan antara berbagai variable. Berrlatar belakang pada semua kompleksitas ini kemudian orang berusaha untuk mengurai kekusutan hubungan ini dengan menyusun model.

Pada abad moderen ini orang tidak bisa lepas dari penggunaan model untuk menggambarkan sesuatu baik yang nyata yang sudah ada dan hidup dalam alam keseharian manusia maupun sesuatu yang masih diangan-angankan oleh seseorang ataupun sekelompok orang. Model-model ini menyangkut model tentang cuaca, seismic-geology, dinamic dari angin dalam mengangkat bodi pesawat. Selain hal tersebut area ilmu pengetahuan sosial, ilmu ekonmi, juga tidak terlepas dari penggunaan model tersebut.

Model-model ini diekspresikan melalui berbagai macam cara yang akan dibahas pada bagian-bagian berikut ini.

1.2. MEMAHAMI PEMODELAN (MODELLING)

Pemodelan adalah suatu upaya yang dilakukan untuk membangun suatu model. Seringkali pemodelan ini menjadi suatu kegitan yang sangat menarik. Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang *aeronautica manufacturing* sedang merencanakan membangun suatu model baru dari suatu pesawat masa depan. Dalam kegiatan perancangan ini mereka mutlak menggunakan suatu model. Usaha yang dia lakukan adalah pemodelan atau *modelling* dengan membuat purwarupa (*prototype*) dari pesawat yang sedang dipertimbangkan untuk diproduksi. Tentu saja ukuran dan dimensi dari pesawat purwarupa yang sedang dalam perencanaan ini adalah sangat kecil, bahkan ukurannya bisa dikatakan sangat mini.

Di sini yang menjadi perhatian tidak hanya bentuknya saja. Namun juga berat, bentang dan model sayap, panjang bodi, desain ekor, flap dan juga masalah teknis serta segala aspek yang ada pada pesawat asli (nantinya). Semua itu termuat dalam bentuk purwarupa tersebut. Purwarupa ini nantinya tidak hanya sekedar untuk dipamerkan, namun lebih dari itu akan diujicoba untuk diterbangkan dan bahkan tidak jarang dilakukan manuver. Dari proses ujicoba terbang ini kemudian diamati, dipelajari, dan dilakukan analisis atas performansi dari pesawat yang masih sebagai purwarupa tersebut. Dari hasil analisis ini kemudian bisa dilakukan perbaikan-perbaikan yang diperlukan hingga tercapai performansi yang diharapkan.

Usaha ini tentu saja bisa menghemat banyak biaya karena perusahaan tidak mungkin membuat pesawat yang sebenarnya dalam bentuk yang asli hanya untuk diuji coba yang terdapat kemungkinan besar terjadi kegagalan. Hal itu tentu saja akan membahayakan pilot yang menerbangkannya karena belum diketahui sama sekali sebelumnya performansi dari pesawat tersebut.

Sebaliknya jika menggunakan purwarupa sebagai media untuk ujicoba maka jikalau terjadi kegagalan tidak akan menimbulkan kerugian yang besar kepada perusahaan. Dalam hal ini jika ternyata terjadi kegagalan atau kondisi yang tidak diharapkan/diinginkan maka kemudian akan dilakukan perubahan-perubahan yang diperlukan.

Kegiatan ini biasa disebut sebagai aeromodelling. Kegiatan ini ternyata telah berkembang tidak hanya sebatas pada kegiatan perusahaan untuk tujuan yang digambarkan di atas, namun kegiatan ini kemudian dikembangkan oleh para hobiist sebagai hobi yang populer yang tidak ada kaitannya dengan usaha perencanaan pembuatan pesawat dengan model baru.

1.3. SIMULASI

Seringkali orang membuat kerancuan ketika berusaha memahami model dengan simulasi. Kedua hal tersebut dianggap sebagai hal yang sama sehingga bisa menggantikan satu sama lain. Memang, model dan simulasi mempunyai hubungan yang sangat erat. Dalam hal model, ada beberapa model yang digunakan hanya untuk merepresentasikan sesuatu. Namun juga terdapat beberapa jenis model yang digunakan untuk mengetahui perilaku, dalam rangkaian waktu, dari suatu *system* yang digambarkan oleh model tersebut. Untuk mengetahui perilaku yang dimaksud di sini diperlukan suatu simulasi.

Dengan pemahaman dari simulasi yang seperti ini maka terdapat beberapa jenis pemodelan yang diikuti oleh simulasi. Dengan simuasi yang dilakukan bisa diberikan evaluasi mengenai bagaimana performansi model yang dibangun tersebut. Jika dari hasil simulasi diketahui bahwa performansi model belum sesuai dengan yang diharapkan dalam arti model yang dibangun belum bisa mereplikasi pergerakan, dalam rangkaian waktu, dari data asli maka model tersebut perlu dilakukan perbaikan. Contoh dalam aeromodelling dengan menggunakan purwarupa di atas, ketika dilakukan ujicoba maka penerbangan ujicoba tersebut bisa dipandang sebagai bentuk simulasi.

Bentuk lain dari simulasi adalah flight simulator. Di sini simulator dibangun dengan terlebih dahulu membuat perangkat yang bisa mereplikasi dari penerbangan suatu pesawat. Dalam *system* ini dihadirkan sensasi yang menyerupai sensasi dari suatu penerbangan pesawat, terutama yang ada di dalam *cockpit.* Sensasi ini adalah menyangkut semua gerak menanjak, menurun baik dengan segenap badan maupun hanya hidung, miring, akselerasi dan pengurangan kecepatan, touch down ataupun take-off. Intinya semua hal yang terjadi pada *cockpit* dalam kaitannya dengan segala instrumen yang ada di dalamnya. Simulator tersebut bisa dipandang sebagai model operasional dari suatu pesawat. Ketika simulator tersebut dioperasionalkan oleh personnel penerbangan maka hal itu bisa dikatakan bahwa kegiatan tersebut adalah suatu simulasi penerbangan.

Hal yang senada dengan hal di atas namun diaplikasikan pada pemodelan ekonomi biasa disebut model perekonomian. Hal ini bisa meliputi suatu daerah saja atau meliputi suatu negara secara keseluruhan. Dalam hal seperti ini perekonomian digambarkan sebagai suatu sistem yang kait-mengait antara berbagai sektor yang ada dalam perekonomian yang berasangkutan. Dalam sistem tersebut juga dimasukkan berbagai variable baik variabel utama maupun variabel pendukung dan bagaimana mereka saling mengait dan berkelindan dalam membentuk suatu keadaan ekononomi pada segmen tertentu dalam sistem yang bersangkutan. Hal tersebut bisa dikategorikan sebagai model dinamis dari suatu perekonomian. Biasanya sebelum hal itu secara resmi dioperasikan terlebih dahulu kepadanya dilakukan validasi dengan melakukan simulasi yang bersifat *ex-post*. Hal ini dilakukan untuk meyakinkan bahwa model tersebut telah mampu melakukan replikasi dari setiap pergerakan dari sistem perekonomian yang bersangkutan. Setelah semuanya sudah menunjukkan performansi yang bagus, maka seseorang bisa menggunakan model tersebut untuk suatu simulasi dengan tujuan perumusan suatu kebijakan. Dengan simulasii ini bisa diketahui bagaimana dampak dari suatu kebijakan terhadap perekonomian. Sebagai misal adalah bagaimana jika pemerintah menaikkan tingkat bunga, atau memotong pengeluaran, atau menaikka tingkat pajak, atau memberikan bebas pajak kepada investor baru, dlsb. Semua ini bisa dilihat akibatnya pada hasil akhir dari simulasi Hasil simulasi ini tidak hanya menyangkut atas segmen tertentu saja namun juga bisa dilihat dampaknya pada berbagai segmen perekonomian yang ada.

Dengan pemaparan yang dilakukan di atas maka bisa dibedakan dengan jelas antara kegiatan pemodelan dan kegiatan simulasi. Selanjutnya dalam buku ini pembahasan akan ditekankan pada pemodelan (modelling)

II

JENIS JENIS MODEL

Terdapat beberapa jenis model di mana seseorang menyusunnya dengan tujuan yang bermacam-macam pula. Jenis-jenis model ini secara garis besar bisa dikelompokkan menjadi dua

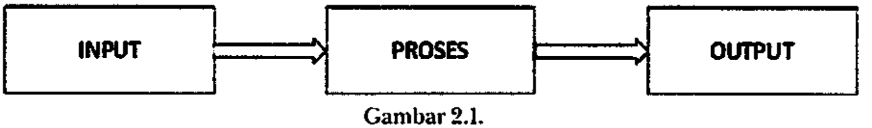
2.1. Pemodelan Static (Statical Modelling)

Pemodelan statis dibuat dengan tujuan untuk menunjukkan sesuatu di mana deskripsi yang ada menunjukkan potret sesaat (*snap-shot*) dari esensi permasalahan yang ingin ditampilkan. Karena sifat-nya hanya potret sesaat inilah maka cara ini disebut pemodelan yang bersifat statis (*statical*). Pengertian statis di sini tidak bisa dimaknai bahwa hal itu tidak bisa ditujukan untuk menggambarkan sutu proses yang mengalir. Untuk memahami hal ini, akan menjadi jelas ketika pembahasan sudah memasuki bagian pemodelan dinamis (*dynamic modelling*).

Dalam hal pemodelan statis ini seseorang mempunyai beberapa pilihan dalam melakukan pemodelan. hal ini bergantung pada tujuan dari melakukan pemodelan tersebut. Hal ini akan dibahas pada bagian berikut ini.

2.1.1. Pemodelan Diagramatis Statis (*Static Diagramatical Modelling*)

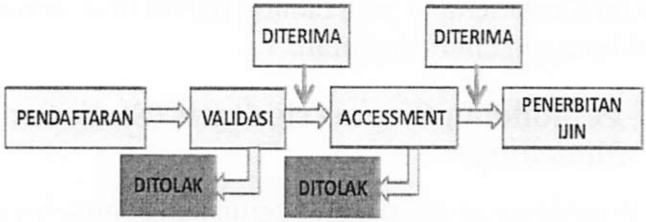
Pemodelan diagramatis biasanya dilakukan guna menunjukkan suatu proses yang statis. Berikut adalah contoh-contoh dari pemodelan diagramatis.



Gambar 2.1.

Gambar di atas menunjukkan suatu sistem dalam suatu proses roduksi di mana di dalamnya terdapat adanya beberapa aktifitas. Tanda panah yang menghubungkan tiga kotak dimaksudkan untuk menunjukkan arah darai aktifitas yang ada dalam sistem produksi tersebut. Secara lebih rinci bisa dikatakan bahwa kegiatan yang ada diawali dari aliran input, dalam banyak hal jumlahnya lebih dari satu, yang masuk kedalam sistem, Selanjutnya input tersebut kepadanya dilakukan suatu proses perubahan atau produksi yang darinya dihasilkan suatu hasil yang disebut output.

Selain model seperti di atas juga banyak ditemui model yang menggambarkan proses pelayanan pada instansi pemerintah tertentu seperti digambarkan pada gambar berikut ini.



Gambar 2.2.

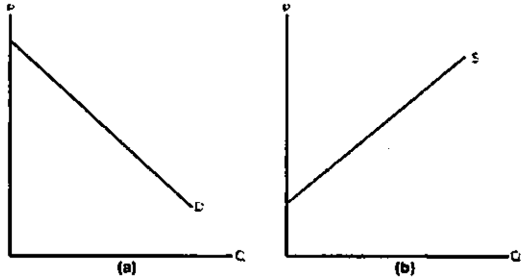
Pada gambar di atas terlihat adanya diagram alur dari suatu proses pelayanan perijinan dalam suatu instansi pemerintah yang menunjukkan keseluruhan proses dari pendaftaran hingga penerbitan ijin. Tanpa harus menggunakan narasi, sebagian besar orang sudah bisa memahami bagaimana proses dari penerbitan ijin tersebut.

Gambar 2.3.

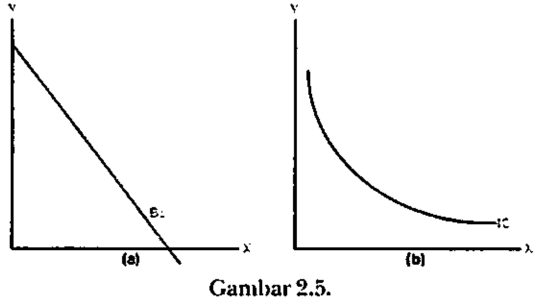
Berbeda lagi dengan peta yang dipaparkan dalam Gambar 2.3. di atas. Pada gambar tersebut disajikan model mengenai suatu kota yaitu Timbuktu. Gambar tersebut menunjukkan relung-relung kota dan jalan-jalan yang menghubungkan tempat satu dengan tempat lainnya di kota tersebut. Di gambar tersebut juga disajikan tempat-tempat yang penting. Walaupun hal ini hanya sebuah peta namun hal itu bisa mewakili kondisi dari kota yang bersangkutan.

2.1.2. Pemodelan Geometris Statis (*Static Geometrical Modelling*)

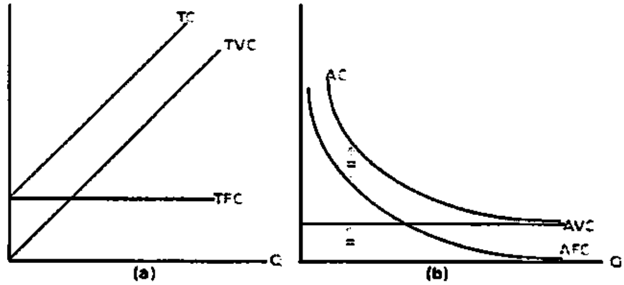
Pemodelan geometris menggunakan bentuk-bentuk bangun geometris maupun grafik dalam merepresentasikan suatu obyek yang ingin ditampilkan. Berikut ini adalah contoh-contoh dari model geometris



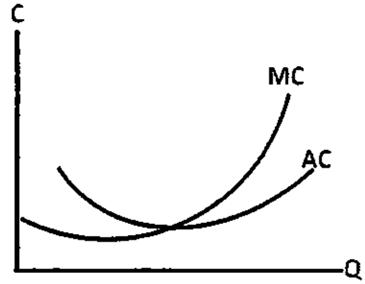
Gambar 2.4.



Gambar 2.5.



Gambar 2.6.



Gambar 2.7.

Pemaparan yang ditampilkan pada Gambar 2.4. sampai dengan Gambar 2.7. menunjukkan model geometris yang bertunjuan untuk menunjukkan/representasi dari obyek-obyek tertentu.

Gambar 2.4., panel (a), merupakan model yang menunjukkan perilaku dari kurva permintaan . Kurva ini menunjukkan adanya hubungan antara harga (P) dengan kuantitas (Q). Pada panel (b) dari Gambar 2.4. terdapat informasi mengenai hubungan antara harga dan jumlah barang yang dipasok ke pasar.

Gambar 2.5. pada panel (a) menunjukkan adanya hubungan antara barang X dan barang Y dalam kaitannya dengan pengeluaran yang dibatasi dengan anggaran konsumen yang sudah tertentu yaitu sebesar B. Grafik tersebut menggambarkan adanya trade-off antara kedua banrang. Slope dari kurva tersebut menunjukkan rasio antara harga dari kedua barang, P_X/P_Y.

Pada panel (b) Gambar 2.5. menunjukkan adanya hubungan antara barang X dan Y dalam kaitannya dengan perolehan tingkat kemanfaatan (utility). Kurva tersebut menunjukkan juga adanya trade-off antara kedua barang untuk menjaga agar jumlah utility yang diterima oleh konsumen tidak berubah di sepanjang kurva tersebut

Gambar 2.6. dan Gambar 2.7. merepresentasikan perilaku dari berbagai biaya: biaya tetap total (TFC), biaya variable total (TVC), biaya produksi total (TC), biaya tetap rata-rata (AFC), biaya variable rata-rata (AVC), biaya produksi rata-rata (AC),

Pada Gambar 2.8. menunjukan hubungan antara biaya AC dan MC di mana terlihat MC memotong AC tepat pada titik minimum dari.AC. Hal ini tidak terjadi begitu saja atau hasil dikarang oleh seseorang. Namun hal itu muncul seperti pada gambar tersebut berasal dari hasil pemodelan (modelling). Hal ini akan dibahas lebih dalam pada bagian berikut di belakang.

2.1.3. Pemodelan *Simbolis-matematis* Statik (*Static Symbolical-mathematical Modeling*)

Pemodelan dengan pendekatan ini (*symbolical-mathematical*) dilakukan dengan mengekspresikan suatu hubungan dengan menggunakan simbol matematika. Model jenis ini biasanya diperuntukkan untuk audience atau pembaca dengan latar belakang pelatihan/training yang lebih tinggi di bidang matematika. Kelebihan dari model ini adalah bisa dilakukan analisis atas ekspresi model yang bersangkutan yang kemudian hasil analisis tersebut menunjukkan adanya aturan atausituasi atau persyaratan tertentu. Berikut ini adalah ekspresi model matematis dari Gambar 2.4. sampai dengan Gambar 2.7.

Gambar 2.4. panel (a) bisa diekspresikan sebagai:

$$Q = f(P)$$
$$dQ/dP < 0$$

$dQ/dP < 0$ adalah slope dari kurva permintaan

Gambar 2.4. panel (b) bisa diekspresikan sebagai:

$$Q = f(P)$$
$$dQ/dP > 0$$

$dQ/dP > 0$ adalah slope dari kurva penawaran

Gambar 2.5. panel (a) bisa diekspresikan sebagai:

$$B = P_X X + P_Y Y$$

Dengan P_X/P_Y adalah slope dari garis bajed tersebut di mana mempunyai tanda negatif.

Gambar 2.5. panel (b) bisa diekspresikan sebagai:

$$U = f(X,Y)$$

Gambar 2.6. panel (a) bisa diekspresikan sebagai:

$$TC = TFC + TVC$$

Gambar 2.6. panel (b) bisa diekspresikan sebagai:

$$AC = AFC + AVC$$

Gambar 2.7. panel bisa diekspresikan sebagai:

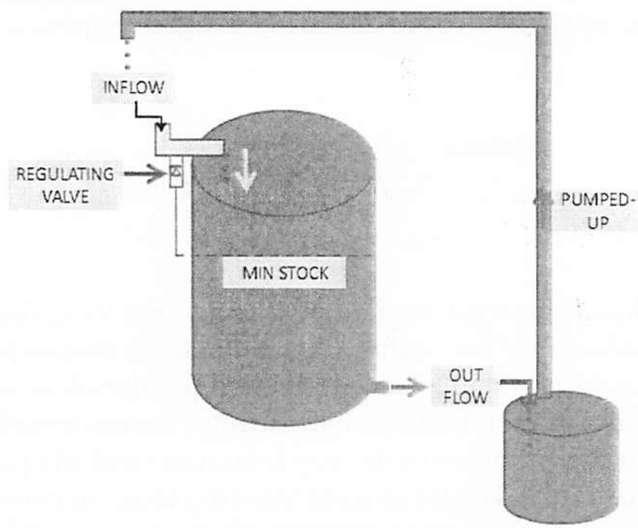
$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{1}{Q}(MC - AC)$$

2.2. Pemodelan Dinamis (Dynamical Modeling)

Berbeda dengan pemodelan yang bersifat statis, pemodelan dinamis di sini menggambarkan adanya pergerakan secara terus menerus dari *system* yang menjadi perhatian. Inti dari pemodelan dinamis di sini menunjukkan substansi dari *system* yang terus bergerak. Selain itu pendekatan pemodelan ini menggambarkan adanya proses umpan balik yang kontinyu sehingga hal itu menyerupai gerak spiral baik ke atas maupun ke bawah.

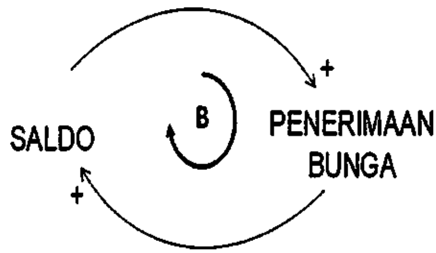
Sama seperti yang ada pada pemodelan statis, pemodelan dinamis ini juga bisa digolongkan menjadi beberapa kelompok sebagaimana dibahas pada seksi berikut ini

2.2.4. Pemodelan Diagramatis Dinamis (*Dynamic Diagramatical Modelling*)



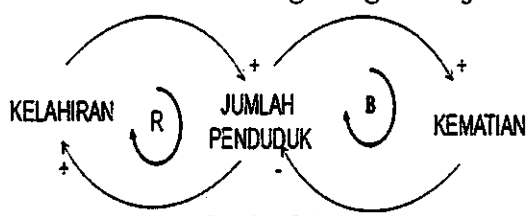
Gambar 2.8.

Gambar di atas menunjukkan adanya proses aliran air dalam drum di mana aliran yang masuk bisa disetel. Dalam hal ini aliran air (*inflow*) yang masuk besarnya disetel sesuai dengan aliran keluar (*outflow*) sedemikian rupa sehingga ketinggian air yang ada di drum tetap konstan pada level minimum (*minimum stock*). Outflow yang ada kemudian dipompakan kembali ke atas untuk dialirkan masuk ke dalam drum. Demikian proses ini akan terus berlanjut.



Gambar 2.9.

System yang ditunjukkan pada gambar di atas merepresentasikan suatu proses dari saldo dalam suatu rekening bank. Setiap bulan saldo tersebut selalu bertambah dengan adanya penerimaan bunga yang diberikan oleh pihak bank. Selanjutnya pada waktu berikutnya jumlah penerimaan bunga dari bank akan meningkat seiring dengan dengan jumlah saldo yang meningkat. Dengan demikian jumlah saldo yang ada di dalam rekening akan semakin membesar seiring dengan berjalannya waktu.

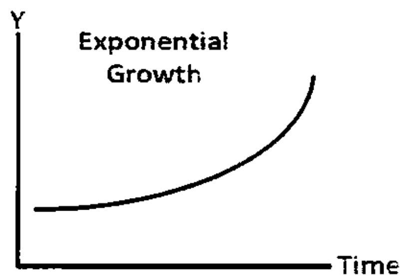


Gambar 2.10.

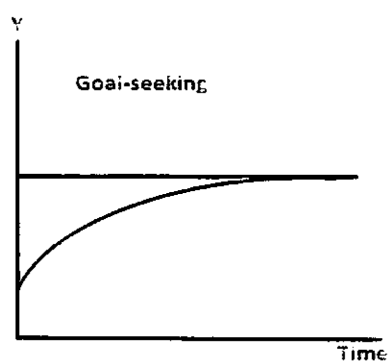
Kasusnya agak berbeda dengan kasus yang digambarkan pada Gambar 2.9. di atas. Gambar tersebut menunjukkan dinamika dari jumlah kelahiran-jumlah penduduk-kematian yang kemudian membentuk suatu sistem. Sistem tersebut bekerja secara terus menerus dengan kekuatan yang ada pada dirinya, yaitu: jumlah kelahiran pada akhirnya akan menambah jumlah penduduk yang pada periode berikutnya akan kembali miningkatkan jumlah kelahiran karena adanya perkawinan di antara para penduduk. Selanjutnya karena adanya pernikahan di antara mereka maka hal ini akan meningkatkan lagi jumlah kelahiran. Di lain pihak dari jumlah penduduk yang ada akan pada mengalami kematian dikarenakan umur mereka yang sudah tua. Hal ini juga berproses sebagamana yang terjadi pada kelahiran. Kematian menyebabkan jumlah penduduk berkurang. Dengan demikian kenaikan jumlah penduduk yang disebabkan oleh adanya jumlah kelahiran yang meningkat akan diimbangi, di lain pihak, oleh peningkatan jumlah kematian. Pertumbuhan penduduk yang akan terjadi bergantung pada selisih dari tingkat kelahiran dan tingkat kematian.

2.2.5. Pemodelan Geometris Dinamis (*Dynamic Geometrical Modelling*)

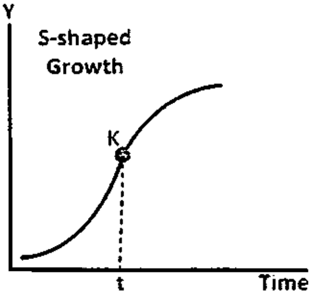
Sama seperti pada pemodelan statis, dalam pemodelan dinamis ini juga dikenal juga pendekatan pemodelan dengan menggunakan pendekatan geometrik. Berbeda dengan pendekatan geometrik yang ada pada pemodelan static, dalam pendekatan geometrik di sini yang menjadi perhatian adalah perilaku dari variabel utama dalam rangkaian waktu. Dengan kata lain di sini hanya terdapat dua variabel yaitu variabel utama dan variabel waktu. Sebagai contoh dalam Gambar 2.8. di atas, walaupun terdapat 4 (empat) variabel: Saldo, penerimaan bunga, tingkat bunga dan waktu namun yang akan muncul dalam representasi geometrik hanyalah variabel saldo dan waktu saja. Dalam hal ini model ini hanya akan menunjukkan perkembangan saldo sebgai variabel utama dalam rangkaian waktu tertentu. Berikut adalah ekspresi geometrik dari suatu *system*.



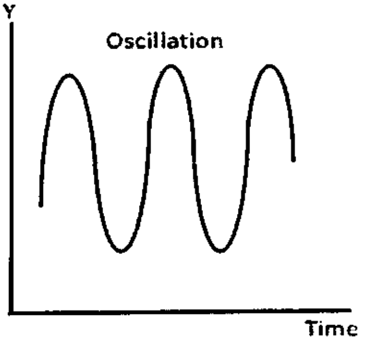
Gambar 2.11.



Gambar 2.12.



Gambar 2.13.



Gambar 2.14.

Gambar 2.10 sampai dengan Gambar 2.13. menunjukkan *system* yang berjalan secara terus menerus dengan kekuatan yang ada dari dirinya sendiri. Gambar 2.10. menunjukkan proses dengan pertumbuhan yang exponential. Hal ini terjadi dikarenakan dalam *system* yang bersangkutan hanya mempunyai *feedback* yang positif dan tidak ada sub-*system* dengan proses *feedback* negatif yang berfungsi sebagai penyeimbang.

Gambar 2.11. menunjukkan perubahan yang bersifat *goal seeking. Goal seeking* di sini dimaknai sebagai pertumbuhan dengan pertumbuhan yang positif namun dengan ukuran pertumbuhan yang terus mengalami penurunan dari waktu ke waktu. Sehingga pada titik waktu tertentu tingkat pertumbuhannya menjadi nol dan grafikya datar.

Gambar 2.12. menunjukkan model pertumbuhan dengan bentuk huruf S. Bentuk huruf S ini sebenarnya disebabkan oleh adanya pertumbuhan yang bersifat *exponential*, namun di dalam *system* yang bersangkutan terdapat adanya batas yang mengekang berkelanjutannya pertmbuhan tersebut. Kendala tersebut bisa berupa misalnya bahan baku yang harus dieksplorasi dari alam yang pada saat itu menjadi semakin menipis dan menipis. Sehingga mulai dari titik waktu itu pertumbuhan mengalami pembalikan yang tadinya terjadi dengan tingkat pertumbuhan positif kemudian berbalik menjadi negatif. Hal ini ditunjukkan oleh titik K dan terjadi pada titik waktu t.

Gambar 2.13. menunjukkan proses di mana terdapata adanya osilasi. Hal ini disebabkan oleh adanya pengaruh yang terjadi secara lambat (bedakala). Selain itu hal ini disebabkan oleh karena adanya overshoot (kelebihan). Biasanya pelaku pengambil kebijakan, atau semacamnya, yang belum memahami sepenuhnya perilaku *system* akan mengira bahwa *treatment* yang mereka berikan tidak atau kurang memberikan efek seperti yang diharapkan. Oleh karena itu mereka merasa perlu untuk menambah dosis dari *treatment* yang mereka berikan. Padahal kalau mereka memahami perilaku *system* sepenuhnya maka hal itu tidak diperlukan karena penyebabnya adalah adanya sifat tunda pengaruh (*effect*). Dalam hal ini tindakan yang diperlukan hanyalah bersabar menunggu sampai efek dari *treatment* yang diberikan mulai bekerja.

Justru karena ketidak tahuan ini menyebabkan terjadinya *overshoot* (kelebihan) dosis *treatment*, sehingga ketika waktu tunda pengaruhnya sudah habis maka terjadi lompatan yang disebabkan oleh besarnya dosis *treatment*. Hal ini akan menyebabkan terjadinya keterkejutan yang menyebabkan pelaku buru-buru mengambil tindakan untuk menghentikan lompatan tersebut yang justru akan mejadikan adanya lompatan kebawah. Proses ini kalao digambarkan seluruhnya akan menunjukan adanya osilasi sepertii pada gambar 2.13.

2.2.6. Pemodelan Dinamis Simbolis-Matematis (Dynamic Symbolical-mathematical)

Ekspresi baik diagramatik maupun geometrik sebagaimana dipaparkan di atas bisa juga direprentasikan dalam ekspresi mate matik.

Gambar 2.10. mempunyai padanan ekspresi berikut ini:

$$I = e^{rt}$$

Gambar 2.11. mempunyai padanan ekspresi berikut ini:

$$I = e^{(r/n)t}$$

Di mana n mengambil nilai dari 1 sampai dengan ∞

Gambar 2.12. bisa diekspresikan sebagai:

$$\frac{P}{C} = \frac{1}{1+e^{g(t-h)}}; \; g = 1, \; h = 0$$

Di mana P: population growth

C: Carrying Capacity

III

RELASI, FUNGSI, GRAFIK DAN PERSAMAAN LINEAR

1. PENDAHULUAN

Relasi, fungsi, persamaan dan grafik merupakan elemen-elemen penting dan fundamental dalam analisis matematika. Banyak permasalahan yang dihadapi dalam area ekonomi maupun bisnis bisa dimodelkan dan selanjutnya diselesaikan dengan baik melalui pendekatan grafik, fungsi dan persamaan. Pendekatan fungsi bisa mengidentifikasi sifat hubungan dari dua atau lebih variable-variable. Pendekatan melalui metoda grafik bisa menjelaskan perilaku secara detail dari suatu variable. Pendekatan persamaan mampu menentukan nilai dan lokasi dari suatu penyelesaian.

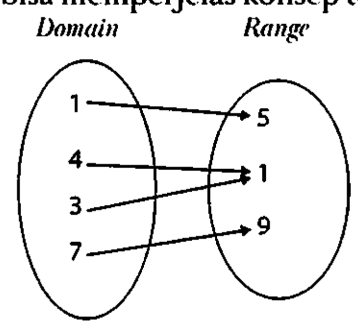
2. RELASI DAN FUNGSI

Relasi dan fungsi merupakan konsep yang paling banyak dipakai dalam analisis ekonomi baik ekonomi mikro maupun ekonomi makro dan juga cabang-cabangnya. Relasi dan fungsi juga menempati posisi yang sangat menentukan dalam analisis ekonometrika. Untuk itu sangat perlu untuk membahas secara khusus konsep relasi dan fungsi beserta aplikasinya dalam ekonomi. Seksi-seksi di bawah ini akan menampilkan diskusi mengenai hal tersebut.

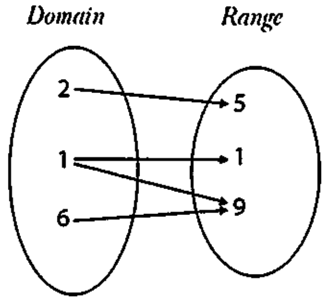
2.1. Relasi

Relasi adalah semua bentuk hubungan di mana setiap elemen yang ada dalam *domain* (input) mempunyai kaitan dengan *satu atau lebih* elemen yang ada dalam *range* (output). Gambar 3.1. dan Gambar 3.2 berikut ini merupakan representasi dari relasi.

Sebagai ilustrasi tambahan, tabel berikut ini menampilkan contoh-contoh yang bisa memperjelas konsep tersebut.



gambar 3.1.

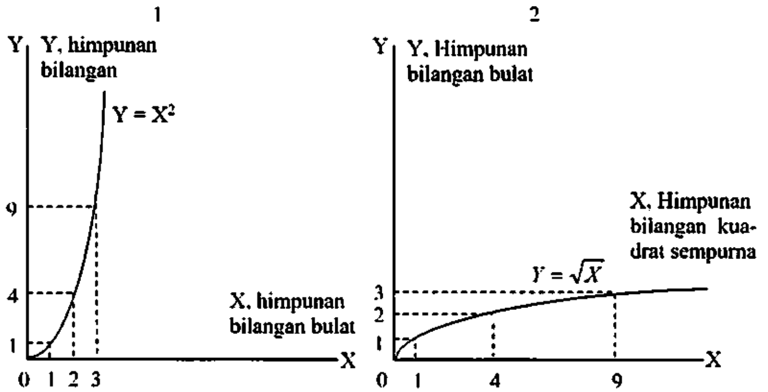


gambar 3.2.

Tabel. 3.1.Relasi

No.	*Domain*	Hubungan (relasi)	*Range*	Penjelasan
1	Himpunan bilangan bulat	Kuadrat dari bilangan	Himpunan bilangan	Jika seluruh bilangan bulat (*domain*) dikuadratkan (relasi) maka hasilnya akan merupakan anggauta himpunan bilangan (*range*)
2	Himpunan bilangan yang merupakan kuadrat sempurna	Akar dari setiap bilangan	Himpunan bilangan bulat	Semua bilangan yang merupakan kuadrat sempurna (*domain*) jika diambil akar (relasi) maka hasilnya merupakan anggauta himpunan bilangan bulat
3	Orang yang mempunyai saudara	Dihitung	Himpunan Orang yang mempunyai saudara	Semua orang yang mempunyai saudara (*domain*) jika diminta menyebut saudara mereka (relasi) maka dipastikan mereka adalah orang yang mempunyai saudara (*range*)
4	Harga barang dan jasa dalam suatu negara	Dinaikkan	Himpunan bilangan riil positif	Harga barang dan jasa (*domain*) yang mengalami kenaikan (relasi) maka kenaikan tersebut merupakan anggauta bilangan riil positif (*range*) karena kalau negatif pengertiannya bukan lagi kenaikan tetapi penurunan
5	Utilitas marginal	Pertumbuhan	Himpunan bilangan negatif	Utilitas marginal (*domain*) jika ditambah (relasi) maka akan menghasilkan bilangan negatif (*range*). Hal ini berdasar pada hukum penurunan dari marginal utility
6	Suatu keadaan di mana terdapat kekurangan pasokan	Evaluasi	Suatu keadaan di mana terdapat kelebihan permintaan	Jika terdapat kekurangan pasokan (*domain*) dan dievaluasi (relasi) dan disimpulkan hal tersebut terkait dengan kelebihan permintaan (*range*).

Ilustrasi melalui Gambar 3.1. dan Gambar 3.2. maupun tabel 3.1. mungkin bagi sementara orang belum bisa memberikan gambaran yang jelas mengenai konsep relasi ini. Gambaran yang lebih jelas bisa diperoleh ketika konsep relasi ini diekspresikan melalui sistem koordinat Cartesian. Dalam sistem koordinat Cartesian, *domain* berada pada sumbu X (*absisca*) dan *range* berada pada sumbu Y (*ordinate*). Pada gambar berikut ini relasi pada nomor 1 dan 2 dalam tabel 3.1. di atas direpresentasikan dalam sistem koordinat Cartesian.

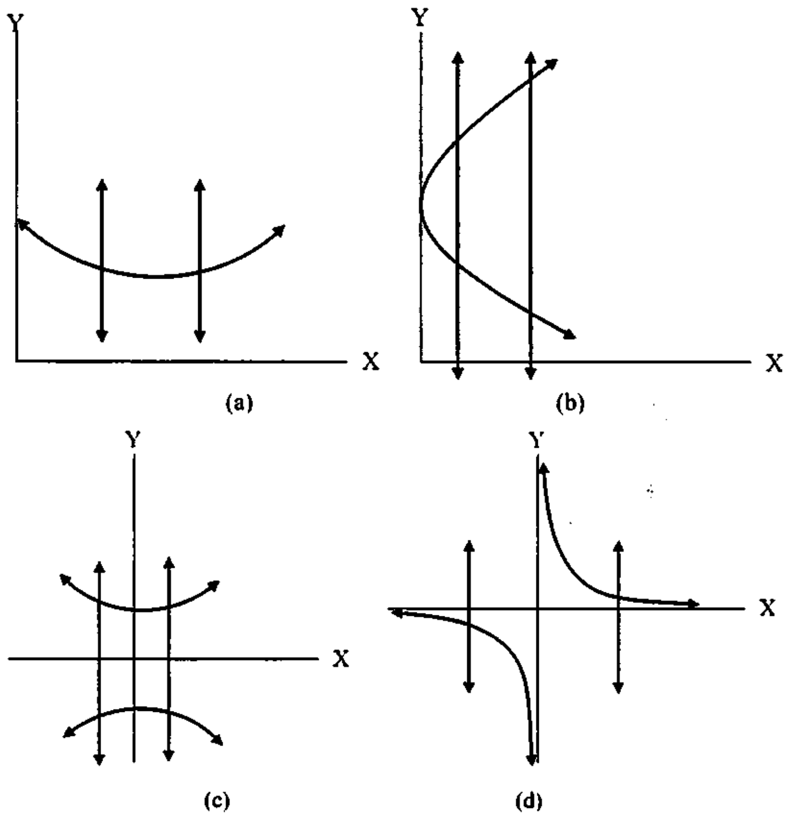


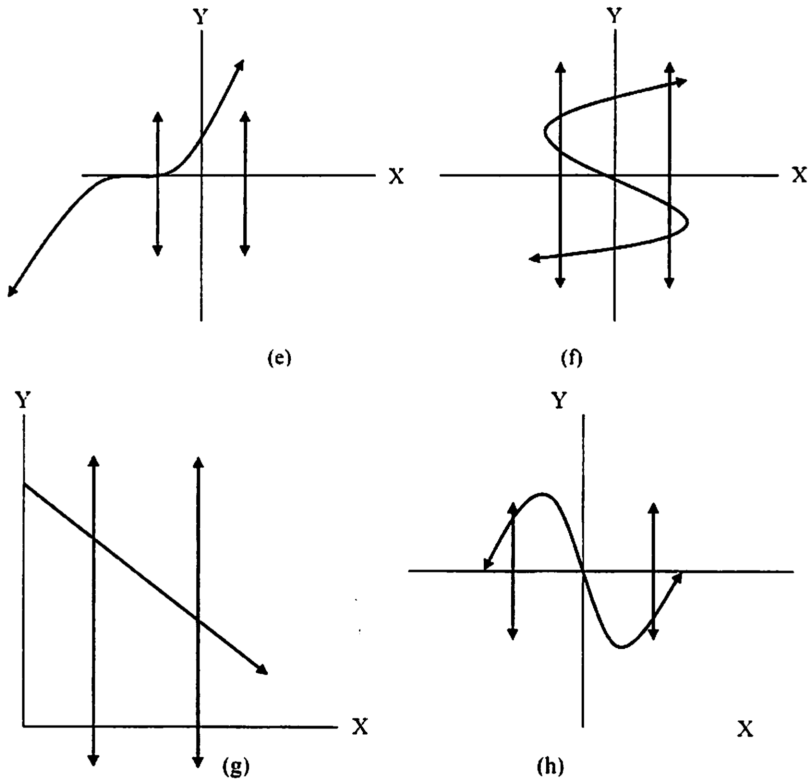
Gambar 3.3.

2.2. Fungsi

Fungsi adalah sebuah relasi yang mana setiap elemen yang ada dalam domain hanya terkait dengan *satu dan hanya satu* elemen dalam range. Dengan definisi seperti ini maka bisa dikatakan bahwa relasi meliputi fungsi tetapi tidak sebaliknya. Dalam Gambar 3.1. bisa dikatakan bahwa hubungan antara *domain* dan *range* yang ada adalah fungsi. Hal ini mengingat bahwa setiap elemen dalam *domain* hanya berhubungan dengan satu elemen *range*. Adapun hubungan yang digambarkan melalui Gambar 3.2. menunjukkan relasi. Hal ini bisa dikatakan demikian karena pada elemen yang ada dalam *domain* terdapat, paling tidak, satu elemen yang mempunyai hubungan dengan lebih dari satu elemen di dalam *range*.

Seringkali dalam kenyataan seseorang mengalami kesusahan dalam membedakan fungsi dari relasi. Penggambaran diagramatikal tidak banyak membantu karena sifat hubungan dari permasalahan yang dihadapi cukup kompleks sehingga diagram yang ada tidak mampu menggambarkan sepenuhnya pergerakan yang ada. Untuk melakukan pembedaan ini ada cara praktis yang bisa ditempuh. Cara ini biasa disebut sebagai uji garis tegak lurus. Dengan cara ini seseorang yang ingin melakukan pengujian perlu menarik satu garis tegak lurus terhadap sumbu X pada *domain* yang ada hingga meliputi semua *range* yang ada. Seterusnya jika ternyata garis tegak lurus yang dibuat ini memotong grafik relasi pada satu dan hanya satu titik pada *range* yang ada maka berarti relasi tersebut adalah fungsi. Jika sebaliknya garis tegak lurus tersebut memotong grafik relasi pada dua atau lebih titik pada *range* yang ada maka relasi tersebut bukan merupakan fungsi. Gambar di bawah ini menjelaskan cara tersebut ..





Dari Gambar 3.4. panel (a) sampai dengan panel (h) disajikan berbagai bentuk relasi yang beberapa diantaranaya berupa fungsi. Dengan alat uji yang sudah disampaikan di depan maka bisa dilakukan pengujian untuk membedakan mana yang berupa fungsi dan mana yang relasi. Pada panel (a) karena garis tegak lurus yang dibuat hanya memotong pada satu titik saja maka bisa disimpulkan bahwa grafik tersebut menunjukkan fungsi. Pada panel b garis tegak lurus penguji memotong grafik dua kali pada bagian bawah dan pada bagian atas sehingga kesimpulannya adalah bahwa grafik tersebut bukan merupakan suatu fungsi dan hanya relasi. Pada panel-panel yang lain pembaca bisa melihat sendiri dan menentukannya bahwa garfik-grafik pada panel (c dan f) juga bukan merupakan suatu fungsi melainkan hanya sebuah relasi. Sementara grafik-grafik yang ada pada panel-panel sisanya, selain panel (b), panel (c) dan panel (f), dalam Gambar 3.4. merupakan fungsi.

Dari penggambaran di atas seseorang bisa membedakan dengan jelas mana grafik yang merupakan relasi dan mana yang merupakan fungsi. Kalau dicermati lebih dalam maka akan bisa didapati adanya bagian sentral dan penting dari pembedaan ini, yaitu: pada kasus fungsi, hubungan (relasi) yang terjadi antara *domain* (X) dan *range* (Y) adalah spesifik dan unik. Ambil sebagai contoh yang paling sederhana adalah panel (g). Pada panel ini grafik yang ada menunjukkan bahwa perubahan *domain* (X) akan diikuti secara konsisten oleh *range* (Y). Pada grafik ini terlihat bahwa setiap saat X naik maka akan selalu diikuti oleh penurunan Y atau sebaliknya setiap saat X turun maka akan selalu diikuti oleh kenaikan Y. Demikian juga pada panel (a), perubahan *domain* X akan diikuti secara konsisten oleh *range* Y, walaupun "aturan" yang diikuti tidak sesederhana yang terjadi pada panel g.

Sebaliknya pada kasus relasi hal ini tidak terjadi. Grafik-grafik yang ada pada panel (b), panel (c) dan panel (f), menunjukkan bahwa perubahan yang terjadi pada *domain* (X) diikuti secara ambigu (*ambiguous*) oleh perubahan yang ada pada *range* (Y). Ketika X naik maka Y bergerak kearah dua arah: naik dan sekaligus turun (harap dicermati pada panel (c) bahwa refleksi yang ada pada bagian bawah, daerah Y yang negatif, juga merupakan bagian relasi yang tidak bisa dipisahkan).

Pengujian yang dilakukan dengan menggunakan pendekatan uji garis tegak lurus tentu saja tidak bisa dilakukan pada jenis-jenis relasi yang tidak bisa diekspresikan dalam bentuk grafik. Sebagai contoh misalnya relasi yang ada di dalam tabel 3.1. nomor 3 merupakan bentuk relasi yang tidak bisa diekspresikan dalam bentuk grafik. Akibatnya pengujian dengan menggunakan garis tegak lurus tidak bisa dilakukan pada kasus ini. Oleh karenanya perlu dihadirkan cara lain yang bisa digunakan untuk membedakan antara fungsi dan relasi dalam kasus seperti ini.

Untuk kepentingan ini pada seksi di bawah ini akan dilakukan eksplorasi lebih jauh mengenai sifat dari relasi dan fungsi. Dari eksplorasi ini nantinya diharapkan akan memperoleh hasil yang bisa digunakan sebagai patokan yang lain dalam membedakan relasi dari fungsi.

Untuk melanjutkannya, lihatlah kembali informasi yang ada dalam tabel 3.1.. Di sini akan dilakukan pembalikan (*invert*) antara informasi yang ada pada *domain* dan *range*. Informasi yang ada pada *domain* akan dipindahkan pada *range* dan sebaliknya yang ada pada *range* akan dipindahkan pada *domain* dan akan disertakan evaluasi atas hal tersebut. Hal ini akan disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel. 3.2. Pembedaan Fungsi dari Relasi

No.	*Domain*	Hubungan (relasi)	*Range*	Penjelasan	Evaluasi
1	Himpunan bilangan	Kuadrat dari bilangan	Himpunan bilangan bulat	Jika seluruh bilangan (*domain*) dikuadratkan (relasi) maka hasilnya akan merupakan anggauta himpunan bilangan bulat (*range*)	**Salah**, karena bilangan pecah juga anggauta himpunan bilangan yang kalau dikuadratkan tetap berupa bilangan pecah
2	Himpunan bilangan bulat	Akar dari setiap bilangan	Himpunan bilangan yang merupakan kuadrat sempurna	Semua bilangan bulat (*domain*) jika diambil akar (relasi) maka hasilnya adalah bilangan kuadrat sempurna	**Salah**, karena tidak semua bilangan bulat kalau diambil akarnya akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna
3	Himpunan Orang yang mempunyai saudara	Dihitung	Orang yang mempunyai saudara	Semua orang (*domain*) jika diminta menyebut saudara mereka (relasi) maka dipastikan bahwa mereka yang disebut adalah orang yang mempunyai saudara (*range*)	**Benar**, karena orang yang disebut adalah saudara dari orang yang menyebut yang berarti dia mempunyai saudara.
4	Himpunan bilangan riil positif	Kenaikan	Harga barang dan jasa dalam suatu negara	Bilangan riil positif (*domain*) yang mengalami kenaikan (relasi) maka kenaikan tersebut adalah harga barang dan jasa dalam suatu negara (*range*).	**Salah.** Sudah jelas, tidak perlu diterangkan
5	Himpunan bilangan negatif	Utilitas marginal	Konsumsi barang oleh individu tertentu (>0)	Bilangan negatif (*domain*) jika dihitung nilai utilitas marginal nya (relasi) maka akan menghasilkan konsumsi barang	**Salah.** Sudah jelas, tidak perlu diterangkan
6	Suatu keadaan di mana terdapat kelebihan permintaan	Evaluasi	Suatu keadaan di mana terdapat kekurangan pasokan	Kelebihan permintaan (*domain*) jika dievaluasi (relasi), disimpulkan ini terkait dengan kekurangan pasokan (*range*)	**Benar** Sesuai dengan logika ekonomi

Pada kolom paling akhir dari tabel 3.2. di atas diberikan evaluasi mengenai pembalikan (*inversion*) tersebut sekaligus hasil yang diperoleh darinya. Jika hasil evaluasi adalah salah maka pembalikan tersebut tidak benar yang berarti hal tersebut tidak bisa dibalikkan (*inverse*). Sebaliknya jika hasil evaluasi menghasilkan penilaian yang benar maka pembalikan tersebut bisa dibenarkan. Satu hal yang perlu dicatat di sini adalah bahwa pembalikan yang memperoleh evaluasi benar menunjukkan bahwa penempatan suatu besaran pada posisi yang manapun: input (*domain*) ataupun output (*range*) tidak menimbulkan kesalahan. Padahal, diketahui bahwa input dan output menunjukkan arah dari relasi: yaitu dari input kemudian menjadi output. Jika arah relasi adalah spesifik maka posisi dari besaran-besaran dalam relasi tersebut tidak bisa dibalikkan karena besaran yang berperan sebagai output tidak bisa berganti peran menjadi input, atau sebaliknya. Kondisi yang seperti ini menunjukkan bahwa relasi yang terjadi bersifat kausal: besaran yang menduduki posisi sebab/*cause* (input) tidak bisa ditukar dengan besaran yang menduduki posisi akibat (*effect*). Hubungan yang spesifik inilah yang disebut sebagai fungsi.

Di lain pihak, jika pembalikan sebagaimana dilakukan pada tabel 3.2. bisa dibenarkan maka berarti besaran-besaran yang ada dalam relasi bisa digantikan posisinya satu sama lain. Hal ini menunjukkan bahwa arah relasi berasal dari manapun: dari satu besaran ke besaran yang lain ataupun sebaliknya. Hal demikian berarti bahwa relasi yang ada bukan merupakan hubungan kausal melainkan sebagai hubungan/ relasi biasa. Karena sifat yang bukan kausal dan arah yang tidak spesifik ini maka dalam kasus seperti ini tidak bisa ditentukan besaran mana yang berperan sebagai "sebab" dan besaran mana yang berperan sebagai "akibat". Dalam analisis ekonomi dan bisnis kasus seperti ini kemudian biasa dinamai sebagai "korelasi". Jika hubungan antara dua besaran dikatakan sebagai "korelasi" maka seseorang tidak bisa menentukan besaran mana yang merupakan "sebab" dan besaran mana yang merupakan akibat/*effect* melainkan hanya bisa mengatakan bahwa kedua besaran tersebut terkait satu sama lain.

Bentuk "sebab-akibat" juga bisa dilihat pada ekspresi fungsi yang dipaparkan pada Gambar 3.4. panel (g). Pada kasus tersebut terlihat bahwa setiap saat X naik maka akan selalu diikuti oleh penurunan Y atau sebaliknya setiap saat X turun maka akan selalu diikuti oleh kenaikan Y. Begitu juga yang terjadi pada pane-panel yang lain selain panel b, c dan f. Pada panel-panel tersebut setiap perubahan (naik/

turun) dari X sebesar satu unit akan diikuti oleh perubahan (naik/ turun) Y sebesar dY/dX.

Karena pergerakan Y mempunyai sifat "selalu" mengikuti perubahan X dengan cara yang tertentu maka dengan mudah bisa dikatakan bahwasanya besaran yang diekspresikan sebagai X berperan sebagai "sebab" dan besaran yang sebagai Y berperan sebagai "akibat".

Karena bersifat "sebab-akibat", maka suatu fungsi bisa didefinisikan sebagai suatu hubungan ketergantungan antara satu besaran dengan besaran yang lain di mana salah satu di antaranya merupakan besaran yang bergantung pada besaran yang lain (*effect*). Besaran yang mempunyai sifat bergantung kemudian disebut sebagai besaran bergantung (*dependent*), sementara besaran yang lain karena sifatnya bebas dalam arti tidak bergantung pada besaran yang lain disebut sebagai besaran bebas. Dalam makna yang lain besaran bebas ini mempunyai peran sebagai penentu atau penyebab dari nilai besaran bergantung (akibat/*effect*) sehingga besaran ini sering diberi nama mengikuti peran tersebut yaitu besaran penentu (*determinant*).

Dalam hal tata cara penulisan, suatu fungsi dituliskan dengan menempatkan besaran bergantung pada ruas kiri dan besaran bebas/ penentu (*determinant*) pada ruas kanan. Hal ini bisa dilihat berikut ini:

$$Y = f(X) \qquad (3.2.1.)$$

Ekspresi fungsi di atas bisa dibaca sebagai Y adalah fungsi dari X yang mengandung makna bahwa "Nilai dari Y bergantung pada nilai X". Atau "nilai X menentukan nilai Y". Dalam banyak kasus adalah sangat umum jika penentu dari nilai Y tidak hanya X saja namun juga besaran-besaran yang lain misalnya Z, K, L. Kalau demikian halnya maka ekspresi fungsi dari kasus ini bisa dituliskan sebagai:

$$Y = f(X, Z, K, L) \qquad (3.2.2.)$$

Penulisan dengan menggunakan simbol "f" di ruas kanan bukan suatu pilihan yang merupakan harga mati melainkan seseorang bisa menggunakan simbol-simbol yang lain, misalnya:

$$P = g(X, Z) \qquad (3.2.3.) \quad \text{atau}$$

$$M = m(G, B) \qquad (3.2.4)$$

Lihat, simbol "g" dan "m" pada ekspresi (3.2.3.) dan (3.2.4) mempunyai peran yang sama dengan simbol "f" pada ekspresi (3.2.1.) maupun (3.2.2.) yaitu menyimbolkan hubungan ketergantungan (fungsional) antara ruas kiri dengan ruas kanan.

Dalam dunia nyata hubungan ketergantungan ini sangat mudah dan banyak sekali ditemui. Misalnya kemampuan menghasilkan laba/keuntungan (π) pada suatu negara akan menentukan besarnya investasi (I) di negara itu, sehingga hal ini bisa dituliskan sebagai berikut:

$$I = f(\pi) \qquad (3.2.5)$$

Contoh yang lain adalah bahwa jumlah barang yang diminta (Q) ditentukan oleh harga barang itu sendiri (P_S) selain pendapatan konsumen (I) dan harga barang lain yang terkait (P_L), sehingga kasus ini bisa disimbolkan sebagai:

$$Q = f(P, I, P_L) \qquad (3.2.6)$$

Selain itu, bisa kita lihat pula adanya hubungan antara jumlah input (I_N) dan jumlah output (O) dalam proses produksi. Ketika jumlah input (I_N) ditambah maka jumlah output (O) akan juga bertambah. Dari sini bisa diketahui bahwa jumlah input (I_N) menentukan jumlah output (O) dan bukan sebaliknya. Untuk itu hal ini bisa dituliskan dalam simbol fungsi sebagai:

$$O = f(I_N) \qquad (3.2.7)$$

Sebagai catatan, dalam praktek berproduksi sering dilihat bahwa seorang produsen menentukan terlebih dahulu jumlah barang (output) yang akan dihasilkan. Setelah itu baru dia menghitung dan menentukan jumlah input yang harus dipakai untuk memproduksi sejumlah output tersebut. Dalam kasus seperti ini sepintas lalu nampak bahwa jumlah output yang ditentukan terlebih dahulu muncul seolah-olah sebagai besaran penentu atas jumlah input yang akan dipakai. Namun sebenarnya hal ini tidak demikian karena produsen tidak akan bisa menghitung berapa jumlah input yang akan dipakai untuk memproduksi sejumlah output yang diinginkan jika dia tidak mengetahui sifat hubungan ketergantungan antara keduanya. Secara lebih jelas, hal itu tidak bisa dilakukan oleh produsen jika dia tidak mengetahui bagaimana input menentukan output. Dalam hal ini misalnya setiap dua unit input akan membentuk satu unit output. Di sini jelas bahwa inputlah yang menentukan output bukannya sebaliknya, walaupun kasus yang muncul adalah terbalik.

Selain contoh-contoh di atas masih banyak lagi contoh-contoh lain dari dunia nyata yang bisa diekspresikan dalam hubungan fungsional matematis sebagaimana pada ekspresi (3.2.1.) sampai dengan (3.2.7).

3. PERSAMAAN

Hubungan fungsional sebagaimana didiskusikan di atas baru bisa menggambarkan bagaimana sifat dasar hubungan antara dua atau lebih besaran yang ada. Di sana hanya menggambarkan besaran mana yang bergantung dan besaran mana yang berperan sebagai sumber pengaruh atau sebagai penentu. Namun penyajian secara fungsional tersebut di atas belum mampu menampilkan secara detail bagaimana sifat ketergantungan atau keterpengaruhan yang terejadi. Dengan pendekatan fungsional di atas orang belum bisa memperoleh penyelesaian atau informasi penting yang bisa digali dari hubungan fungsional tersebut. Sebagai contoh misalnya hubungan antara input dan output sebagaimana diekspresikan dalam (3.2.7), di sana tidak bisa dilihat bagaimana bentuk ketergantungan dari output atas input. Di sana tidak bisa pula didapat informasi mengenai apakah kebutuhan input adalah konstan secara terus menerus ataukah berubah (variable) sesuai dengan banyaknya output yang diproduksi. Dalam kasus seperti ini pula misalnya pendekatan fungsional di atas belum mampu melihat fenomena mengenai sifat variabilitas dari input variable. tepatnya, apakah sifat variabilitas ini progresif (meningkat), konstan, degresif (menurun) atau kombinasi progresif dan degresif. Kemampuan mengungkap sifat variabilitas ini pula akan menentukan sejauh mana kita bisa mengeksplorasi keberadaan efisiensi dalam berproduksi. Hal-hal seperti disebut ini tidak bisa dilakukan dengan pendekatan fungsional sebagaimana dipaparkan pada seksi sebelum ini.

Untuk mengatasi kesulitan ini maka matematika menyediakan alat atau pendekatan lain yang disebut sebagai persamaan. Persamaan adalah suatu ekspresi yang menggambarkan dengan cara bagaimana besaran tergantung yang ada pada ruas kiri bergantung pada besaran penentu di ruas kanan. Bisa dikatakan bahwa persamaan merupakan ekspresi yang lebih detail dari suatu fungsi. Bahkan, bisa dikatakan lebih jauh bahwa persamaan menggambarkan atau merepresentasikan situasi yang ada dalam suatu fungsi. Dengan cara pandang seperti ini maka persamaan sering disamakan dengan fungsi.

Kandungan informasi yang ada dalam suatu persamaan, terhadap mana seseorang menaruh perhatian, bisa ditunjukkan melalui bagaimana cara besaran bergantung di ruas kiri ditentukan oleh besaran penentu di ruas kanan. Ada beberapa macam cara bagaimana besaran penentu di ruas kanan mempengaruhi atau menentukan nilai dari besaran bergantung di ruas kiri. Cara-cara yang berbeda ini ditunjukkan oleh berbagai bentuk dari persamaan yang ada. Seksi berikut ini akan memberikan diskusi mengenai berbagai bentuk dari persamaan yang dimaksud.

3.1. Operasi terhadap Persamaan

Untuk mengawali pembahasan mengenai persamaan marilah kita lihat terlebih dahulu ekspresi dari suatu persamaan.

$$3x - y - 4 = 0 \quad (3.3.1)$$

Ekspresi di atas bisa dipilahkan menjadi dua, yaitu: ruas kiri yaitu ruas yang berada pada sebelah kiri dari tanda "sama dengan". Sementara ruas kanan adalah ruas yang letaknya berada pada sebelah kanan dari tanda "sama dengan".

Ekspresi di atas merupakan suatu persamaan karena ruas kiri dinyatakan sama dengan ruas kanan. Sebagai konsekuensi dari tanda "sama dengan" maka terhadapnya bisa dilakukan berbagai operasi aritmatika. Di bawah ini adalah contoh-contoh operasi aritmatika atas suatu persamaan

$$3x - y - 4 + 5 = 0 + 5$$
$$3x - y - 4 + 5 \neq 0 + 4$$

Ekspresi hasil operasi yang pertama di atas tetap bisa dikatakan sebagai suatu persamaan walaupun telah dilakukan suatu operasi aritmatika terhadap ekspresi awal. Operasi aritmatika yang dilakukan terhadap ekspresi awal ternyata tidak mengubah status dari ekspresi awal yaitu sebagai persamaan. Hal ini terjadi karena operasi aritmatika yang dilakukan terhadap ekspresi awal dilakukan secara seimbang atas ruas kiri maupun ruas kanan, yaitu menambahkan bilangan yang sama, 5, pada kedua ruas.

Sementara itu tetap mengacu pada ekspresi awal, persamaan (3.3.1), dan lihatlah ekspresi di bawah ini,

$$3x - y - 4 + 5 \neq 0 + 4$$

Ekspresi tersebut merupakan hasil operasi aritmatika dari ekspresi awal, persamaan (3.3.1). Namun demikian ekspresi tersebut sudah berubah statusnya, yaitu tidak lagi sebagai persamaan melainkan sebagai pertidaksamaan. Hal ini terjadi karena operasi aritmatika yang dilakukan atas ekspresi awal tidak seimbang, yaitu menambahkan bilangan yang berbeda nilai atas ruas kanan dan ruas kiri.

Selanjutnya, pandanglah ekspresi di bawah ini:

$$y = 3x - 4 \quad (3.3.2)$$

Ekspresi di atas merupakan bentuk eksplisit dari ekspresi awal sebelumnya, persamaan (3.3.1),. Sekarang, jika kita melakukan operasi perkalian sebagai berikut:

$$7y = 7(3x - 4)$$

Terlihat bahwa ruas kiri tetap sama dengan ruas kanan karena operasi aritmatika yang terjadi dilakukan dengan mengalikan kedua ruas dengan bilangan yang sama.

Namun,

$$7y \neq 9(3x - 4)$$

Dengan tetap mengacu pada ekspresi awal, persamaan (3.3.1), maka ekspresi di atas telah berubah status menjadi pertidaksamaan dikarenakan operasi aritmatika yang dilakukan atas kedua ruas tidaklah seimbang, yaitu: ruas kiri dikalikan dengan bilangan tujuh sementara ruas kanan dikalikan dengan sembilan.

Sebagai kesimpulan dari pembahasan ini adalah bahwasanya operasi aritmatika yang manapun tidak akan mengubah status dari suatu ekspresi jika operasi aritmatika yang bersangkutan dilakukan secara seimbang. Makna seimbang di sini adalah melakukan operasi yang tepat sama pada ruas kiri dan ruas kanan. Jikalau ruas kiri dikalikan/dibagi/ditambah/dikurangi dengan suatu bilangan tertentu atau operasi-operasi yang lain maka ruas kananpun harus dilakukan hal yang sama dengan bilangan yang sama pula.

Dengan prinsip pengoperasian ini maka seseorang bisa menggunakannya untuk menyelesaikan suatu persamaan. Sebagai ilustrasi tataplah ekspresi awal di atas, persamaan (3.3.1), yang ditulis kembali di bawah ini

$$3x - y - 4 = 0$$

Ekspresi di atas bisa ditulis kembali menjadi ekspresi baru tanpa harus mengubah status (tanpa mengubah nilai) menjadi:

$$3x - y - 4 + 4 = 0 + 4$$
$$3x - y = 4$$

atau

$$3x - y + y = 4 + y$$
$$3x = 4 + y$$
$$3x - 4 = y$$

3.2. Persamaan Linear

Persamaan linear banyak merepresentasikan perilaku dari berbagai variable baik dalam ilmu alam (*nature science*) maupun ilmu sosial (*social science*). Bahkan banyak para modeller menggunakan pendekatan linear dalam memodelkan perilaku suatu variable karena alasan parsimoni, terlepas dari segala kekurangannya. Diskusi di bawah ini akan memaparkan berbagai sendi penting dari persamaan linear.

3.2.1. Representasi Persamaan Linier

Kata linear dalam konteks ini merujuk pada bentuk atau sifat kebergantungan dari fungsi tersebut yang mana besaran penentu di ruas kanan memberikan pengaruh atau menentukan besaran bergantung pada ruas kiri dengan cara yang lugu (*straightforward*). Dalam persamaan ini besaran pada ruas kiri akan berubah bergantung pada pangkat (*power*) tingkat satu dari besaran yang ada pada ruas kanan. Oleh karena itu fungsi yang berbentuk persamaan linier ini biasa juga disebut sebagai persamaan berderajad satu.

Bentuk umum dari persamaan linier adalah:

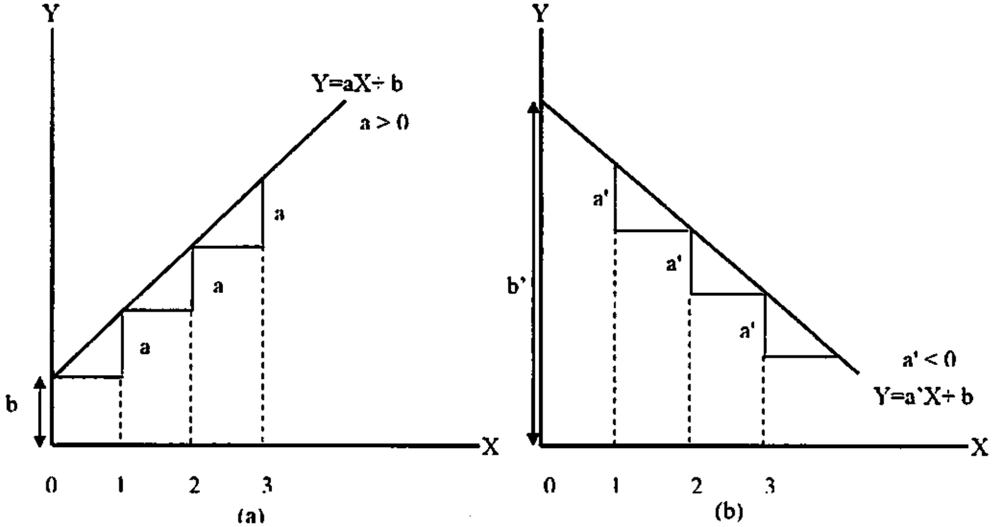
$$Y = aX + b \quad (3.3.3)$$

di mana $a \neq 0$ dan b adalah bilangan riil.

"a" disebut sebagai koefisien yang menentukan seberapa besar Y akan berubah jika X berubah dengan tingkat perubahan yang kecil. Adapun b disebut sebagai konstanta karena besarnya b sudah tertentu dan tidak dipengaruhi oleh siapapun (konstant). Makna lain dari konstanta ini merujuk pada nilai Y yang netral dalam arti tidak ada pengaruh dari besaran yang ada pada ruas kanan, dalam hal ini adalah X. Secara teknis bisa dikatakan bahwa konstanta ini adalah merupakan nilai dari ruas kiri, Y, pada ketika besaran penentu di ruas kanan, X, adalah nol.

Cara lain untuk memahami fungsi tersebut adalah tidak hanya melihat ekspresi aljabar dari fungsi tersebut melainkan melalui ekspresi geometri atau grafis dari fungsi tersebut. Secara grafis fungsi linier bergerak sebagaimana cara bergerak atau perilaku dari suatu garis lurus (*line*). Grafik di bawah ini menunjukkan perilaku fungsi linear yang dimaksud.

Pada panel (a) Gambar 3.4. di bawah ini terlihat bahwa perilaku grafik adalah lugu dan lurus positif. Hal ini bisa dilihat dari besarnya nilai a (angka arah grafik atau gradient) yang positif (a > 0). Bisa dilihat di sana bahwa jika nilai X naik satu satuan, dari 0 ke 1 atau dari 1 ke 2 atau dari 2 ke 3 atau dari n ke n+1, maka nilai Y naik sebesar a.



Gambar 3.5.

Hal yang sama juga terjadi pada panel (b) Gambar 3.5. Pada gambar ini perilaku grafik adalah sederhana/lugu yang ditunjukkan oleh bentuk grafik yang lurus negatif. Besarnya pengaruh X terhadap Y adalah negatif a, yakni jika X naik sebesar satu satuan, dari 0 ke 1 atau dari 1 ke 2 atau dari 2 ke 3 atau dari n ke n+1, maka besarnya Y akan turun sebesar "a".

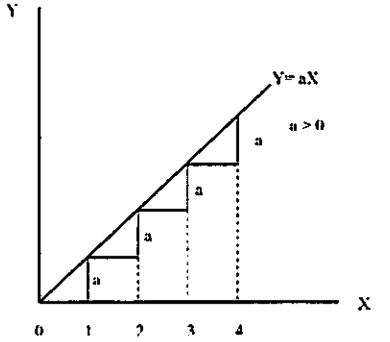
Dengan melihat pemaknaan dari "a" maka seseorang bisa merasakan bahwa "a" mempunyai posisi yang sangat penting dalam membentuk penampilan grafik. Dalam istilah yang lebih umum "a" biasa juga disebut sebagai angka arah grafik. Disebut demikian karena "a" menentukan arah grafik. Lihat pada penampilan kedua grafik pada Gambar 3.5. di atas. Pada panel (a) angka arah grafik adalah positif sehingga arah pergerakan grafik mengarah ke kanan atas. Sementara pada panel (b) menunjukkan hal yang sebaliknya karena angka arah grafik yang negatif.

Angka arah grafik ini biasa juga disebut sebagai *gradient* atau *slope*. Dalam arti harfiah *slope* dalam bahasa Indonesia mempunyai arti "lereng" yang menunjukkan ke mana arah kemiringan grafik. Suatu grafik yang mempunyai *slope* (lereng) yang positif grafik tersebut mendaki dari bawah naik ke kanan adapun grafik yang mempunyai *slope* (lereng) yang negatif dia akan meluncur dari atas turun ke kanan.

Sekarang, pembahasan akan diberikan kepada besarnya nilai (*size/magnitude*) dari *slope*. Slope dari garis linier yang sedang di bahas adalah "a" yang mana dia merupakan bilangan konstan. Makna konstan di sini adalah tidak berubah sehingga bisa dikatakan bahwa besarnya pengaruh dari X terhadap Y adalah konstan. Dengan kata lain perubahan Y, yang diakibatkan oleh perubahan X, akan tetap sebesar "a" pada panel (a) dan sebesar "−a" pada panel (b) untuk nilai X yang manapun. Karena sifat pengaruh yang besarnya tetap/konstan inilah maka hal ini menunjukkan bahwa karakter dari X dalam mempengaruhi atau menentukan Y adalah sederhana/lugu (*straightforward*) sebagaimana ekspresinya yang berbentuk garis lurus.

Pada kedua panel pada Gambar 3.5 di atas, kedua grafik mempunyai angka konstanta yakni sebesar "b" untuk panel (a) dan sebesar "b'" untuk panel (b). Secara aljabar, angka konstanta ini menunjukkan besarnya nilai Y pada saat nilai X adalah nol. Hal ini bisa dilihat pada hasil yang diperoleh jika kita mengganti nilai X dengan nol. Dengan penggantian X dengan nol ini maka nilai Y pada ekspresi panel (a) besarnya sama dengan b dan pada panel (b) besarnya sama dengan b'. Secara grafikal angka konstanta ini menunjukkan penggal garis (*intercept*) pada sumbu Y.

Terdapat kasus yang umum dalam matematika di mana suatu grafik fungsi linear di mana nilai konstanta adalah nol sehingga secara geometri dia tidak mempunyai penggal garis (*intercept*) dengan sumbu Y. Hal ini bisa dilihat pada Gambar 3.6. di bawah ini:



Gambar 3.6.

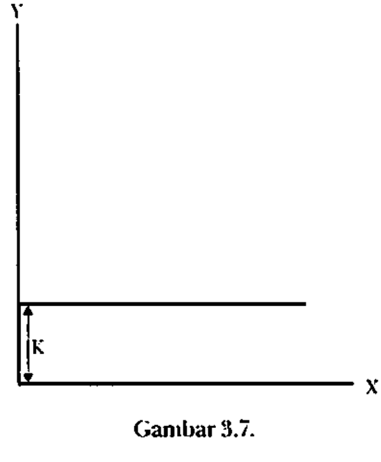
Selain itu, ada juga ekspresi persamaan linier yang mana pengaruh dari X adalah nol. Hal ini bisa ditunjukkan dalam bentuk persamaan seperti di bawah ini.

$$Y = K$$

Dalam ekspresi di atas tidak terlihat adanya besaran X. Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh X terhadap Y adalah nol. Hal ini bisa dilihat dengan mudah jika persamaan di atas ditulis kembali dengan cara lain yang tidak mengubah nilai sebagai berikut.

$$Y = 0X + K$$

Dengan ekspresi baru di atas maka sekarang bisa dilihat bahwa ekspresi baru tersebut sesuai dengan bentuk umum dari persamaan linier sebagaimana disebutkan dalam persamaan (3.3.3). Terlihatt dalam ekspresi baru tersebut bahwasanya nilai "a" adalah nol yang berarti bahwa pengaruh dari X terhadap Y adalah nol atau tidak ada pengaruh sama sekali. Secara grafis persamaan ini bisa digambarkan sebagai berikut ini.



Gambar 3.7.

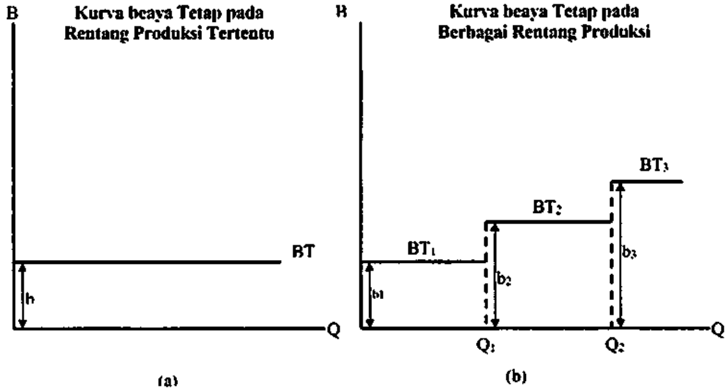
Pada Gambar 3.7 di atas bisa dilihat bahwa besarnya nilai Y adalah tetap sebesar K untuk nilai X yang manapun. Hal ini menunjukkan bahwa besarnya nilai X tidak memberi pengaruh apapun pada besarnya nilai Y.

3.2.2. Persamaan Linear dalam Area Ekonomi

Dalam analisis ekonomi penggunaan grafik sangat membantu. Bahkan penggambaran dengan grafik telah banyak menyederhanakan konsep yang tadinya nampak rumit sehingga lebih mudah dipahami. Dalam proses mekanisme dalam pasar dalam hal penentuan harga keseimbangan pasar misalnya, penggunaan grafik berhasil menggambarkan proses yang terjadi termasuk proses interaksi diantara kekuatan-kekuatan pasar yang ada. Selain tiu masih ada banyak konsep lagi yang dipaparkan dengan menggunakan representasi grafik. Untuk itu perlu secara khusus melihat hal tersebut beserta analisis matematika yang mungkin bisa dilakukan atasnya.

3.2.2.1. Kurva Biaya Tetap

Pada Gambar 3.8. di bawah ini kedua grafik, baik pada panel (a) maupun panel (b), menunjukkan perilaku yang linear yang mana keduanya mempunyai pola yang sama. Kedua grafik menunjukkan perilaku yang tidak memberikan respon sama sekali terhadap perubahan jumlah produksi (Q). Biaya yang mempunyai perilaku seperti ini dikategorikan sebagai biaya tetap. Sifat khas dari biaya tetap adalah bahwasanya jumlah biaya yang harus dikeluarkan adalah konstan pada tingkat output (Q) yang manapun, dalam rentang produksi tertentu. Bahkan ketika tidak ada produksi sekalipun, yang berarti Q = 0, biaya tetap harus dikeluarkan . Dalam Gambar 3.8. panel (a) jumlah biaya tetap yang harus dikeluarkan adalah sebesar "b". Contoh yang pas yang menunjukkan perilaku biaya tetap ini adalah tanah yang di atasnya berdiri bangunan pabrik di mana kegiatan produksi dilakukan.

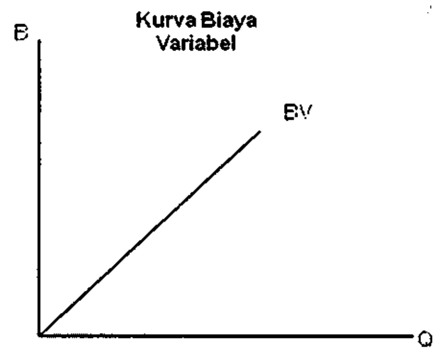


gambar 3.8.

Memang perlu di catat bahwa biaya tetap berperilaku seperti dipaparkan pada panel (a) Gambar 3.8. di atas hanya dalam batas rentang tertentu saja. Ketika batas ini sudah terlampaui maka biaya tetap akan berubah. Namun sekali lagi ketika biaya tetap sudah berubah maka dalam rentang yang baru ini perilaku biaya tetap kembali konstan. Sebagai gambaran adalah ketika jumlah produksi sudah besar, volume produksi sudah melebihi Q_1, maka perusahaan perlu perluasan bangunan pabrik untuk mengakomodasi kegiatan produksi. Dalam keadaan inilah maka perusahaan perlu membangun bangunan pabrik baru agar kegiatan produksi tetap bisa berjalan. Konsekuensinya perusahaan tersebut perlu mengeluarkan sejumlah uang tertentu untuk mendirikan fasilitas produksi baru. Setelah bangunan pabrik baru ini tersedia maka tidak ada lagi pengeluaran yang berkaitan dengan hal ini, maknanya perilaku biayanya akan kembali konstan walaupun jumlah produksi terus meningkat. Pengeluaran baru inilah yang dianggap sebagai kenaikan biaya tetap sebagaimana ditunjukkan oleh panel (b) pada Gambar 3.8. di atas di mana biaya tetap mengalami kenaikan dari b_1 menjadi b_2 dengan jumlah kenaikan sebesar $(b_2 - b_1)$. Pada suatu saat nantinya ketika perusahaan sudah berkembang dan jumlah produksi telah mencapai Q_2 sementara produksi ingin terus ditingkatkan maka proses seperti di depan akan terulang lagi. Dalam hal ini adalah kapasitas produksi perlu ditingkatkan yang berarti memerlukan bangunan dan peralatan pabrik lebih besar lagi. Hal ini mengakibatkan biaya tetap naik lagi dari b_2 ke b_3. Kemudian setelah itu biaya tetap ini konstan lagi walaupun jumlah produksi mengalami peningkatan.

3.2.2.2. Kurva Biaya Variabel

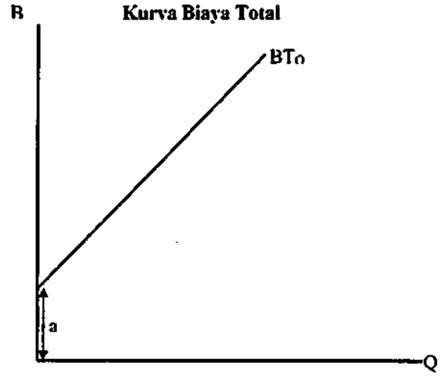
Berbeda dengan perilaku biaya tetap, biaya variable menunjukkan perilaku yang sepenuhnya merespon pada perubahan jumlah produksi. Beaya variabel ini menurut definisi dikatakan bahwa dia akan bertambah sesuai dengan pertambahan jumlah produksi. Semakin banyak jumlah produksi maka semakin besar jumlah beaya variabel yang harus dikeluarkan. Salah satu di antara pengeluaran yang termasuk dalam jenis biaya variabel ini adalah pengeluaran untuk bahan baku. Semakin besar jumlah yang harus diproduksi maka semakin besar pula jumlah bahan baku yang harus dikeluarkan. Di lain pihak jika tidak ada produksi (Q=0) maka logikanya tidak ada bahan baku yang perlu dikeluarkan yang berarti pengeluaran untuk bahan baku (beaya variable) adalah nol. Berdasar perilaku yang seperti inilah maka kurva biaya variable berasal dari titik pangkal dengan koordinat (0,0) sebagaimana bisa dilihat pada Gambar 3.9. di bawah.



gambar 3.9.

3.2.2.3. Kurva biaya Total

Dalam konsep biaya, biaya dibedakan antara biaya tetap dan biaya variabel yang mana perilaku dari masing-masing telah dipaparkan pada Gambar 3.9. dan Gambar 3.9. di atas. Sekarang akan kita lihat satu jenis biaya lagi yaitu biaya total. Berdasar definisi, biaya total merupakan penjumlahan dari biaya tetap dan biaya variabel yang secara geometrik merupakan gabungan antara Gambar 3.9. dan Gambar 3.9.



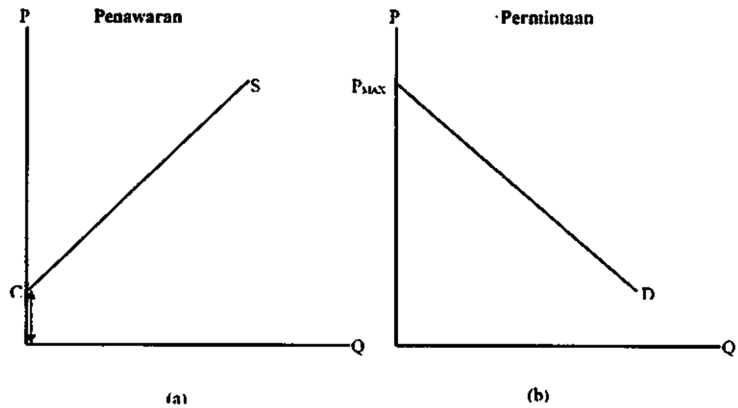
gambar 3.10.

Kurva biaya total sebagaimana dipaparkan pada Gambar 3.10. di atas merupakan penjumlahan dari biaya tetap dan biaya variabel. Hal ini bisa dicek bahwa setiap titik yang ada pada kurva biaya total (BT_O) adalah jumlah dari biaya tetap dan biaya variabel.

3.2.2.4. Kurva Penawaran dan Perimintaan

Kurva penawaran dan kurva permintaan merupakan model sentral dalam analisis ekonomi. Perilaku suatu perekonomian baik itu pada level mikro seperti mekanisme pembentukan harga di pasar, proses perdagangan internasional ataupun pada level makro seperti pasar uang dan pasar finansial semuanya bisa digambarkan dengan baik melalui kedua kurva tersebut. Oleh karenanya kedua kurva tersebut telah dianggap sebagai model baku dalam analisis ekonomi yang setiap mahasiswa ekonomi tidak boleh tidak mengetahuinya. Walaupun sifat analisis yang didekati dengan kurva penawaran dan permintaan ini bersifat statik namun hal ini bisa diperluas sehingga bisa menggambarkan perubahan yang terjadi antar waktu. Terlepas dari kelemahan-kelemahan yang ada namun ternyata model yang digambarkan oleh kurva penawaran dan permintaan telah sangat membantu ekonom dalam melakukan analisis pada tingkatan dasar maupun pada tingkatan lanjutan.

Penampilan dari kurva penawaran dan permintaan bisa dilihat pada Gambar 3.10. di bawah ini. Coba dicermati bahwa dalam kedua panel tersebut sumbu horizontal dan sumbu vertikalnya tidak berupa X dan Y melainkan Q dan P. Huruf Q pada sumbu horizontal menyimbolkan "Quantity" yang dimaknai sebagai jumlah barang yang ditawarkan pada kurva penawaran dan jumlah barang yang diminta pada kurva permintaan. Sementara pada sumbu vertikalnya menunjukkan P yang menyimbolkan "Price" yang dimaksudkan sebagai harga dari barang yang ditawarkan pada kurva penawaran dan harga barang yang diminta pada kurva permintaan.



Gambar 3.11.

Pada panel (a) Gambar 3.11. kurva penawaran mempunyai penggal garis (*intercept*) dengan sumbu vertikal P pada titik C. Secara intuisi hal ini menunjukkan bahwa ketika jumlah barang yang ditawarkan adalah nol maka besarnya harga (P) adalah sebesar C. Hal ini menunjukkan bahwa penawaran baru muncul ketika harga barang lebih tinggi dari C. Hal ini berdasar pada praktek di dunia nyata di mana penawaran berasal dari produksi, yakni: produsen memproduksi barang terlebih dahulu sebelum pada akhirnya dibawa atau dipasok atau ditawarkan ke pasar. Dengan demikian harga jual minimum dari barang tersebut tidak boleh lebih rendah dari biaya produksi yang dalam panel (a) ditunjukkan sebagai C. Pada tingkat harga yang terbentuk di pasar sebesar C, produsen baru berada pada titik impas dalam arti dia dalam keadaan tidak mengalami kerugian tetapi juga tidak memperoleh keuntungan. Dalam keadaan seperti ini.

mengasumsikan keadaan yang dihadapi produsen adalah normal, maka produsen memilih untuk tidak bekerja atau tidak memproduksi barang tersebut yang berarti penawaran barang tersebut ke pasar adalah nol. Perubahan harga sedikit saja dari posisi ini akan menggerakkan produsen untuk memproduksi dan menawarkan barang tersebut ke pasar. Semakin tinggi perubahan harga pasar dari posisi awal, *ceteris paribus*, maka akan semakin mendorong produsen untuk memproduksi dan menawarkan barangnya ke pasar sehingga jumlah barang tersebut yang ditawarkan ke pasar akan semakin tinggi. Hal inilah yang menjadi penjelasan mengenai mengapa bentuk kurva permintaan mengarah (berlereng) ke kanan atas atau positif dan mempunyai penggal garis (*intercept*) dengan sumbu vertikal.

Pada panel (b) tergambar kurva permintaan yang mengarah (berlereng) ke bawah atau negatif. Penggal garis (*intercept*) pada sumbu vertikal menunjukkan harga barang yang maksimum. Hal ini demikian karena pada tingkat harga P_{MAX} maka jumlah barang yang diminta adalah nol sehingga tidak ada lagi permintaan barang pada tingkat harga tersebut. Pergerakan ke bawah dari harga barang tersebut dari tingkat P_{MAX} akan menggerakkan konsumen untuk membeli (meminta) barang tersebut. Semakin rendah tingkat harga barang di pasar, *ceteris paribus*, maka akan semakin besar jumlah barang yang diminta oleh konsumen.

3.2.3. Penyusunan Persamaan Garis linear

Mengetahui secara geometrik saja dari penampilan suatu grafik atau garis tidak akan bisa memberikan manfaat analitis. Manfaat yang lebih besar akan diperoleh jika seseorang bisa mengetahui unsur-unsur pembentuk garis tersebut. Dengan mengetahui unsur-unsur pembentuk ini maka sebuah garis akan bisa digambarkan secara tepat. Lebih dari itu akan bisa diungkap berbagai kenyataan yang di bawa oleh garis tersebut. Untuk itu keperluan ini perlu disusun terlebih dahulu persamaan garis yang dimaksud. Guna melakukan hal ini maka diperlukan adanya kemampuan untuk menyusun persaman garis.

Sebelum menyusun suatu persamaan garis linear, maka perlu ditampilkan lagi ekspresi umum dari garis linear sebagaimana yang ditampilkan di muka yaitu:

$$Y = aX + b, \quad (3.3.3) \text{ dan}$$
$$Y = aX \quad (3.3.4)$$

Ekspresi dari persamaan (3.3.3.) menunjukkan suatu garis linear yang mempunyai penggal garis (*intercept*) sementara persamaan (3.3.4) merupakan persamaan garis linear yang tidak mempunyai penggal garis (*intercept*).

3.2.3.1. Menyusun Persamaan Garis Linear melalui Satu Titik dengan Angka Arah Tertentu

Suatu garis linear bisa dibentuk melalui satu titik dengan angka arah (*gradient*) tertentu. Angka arah (*gradient*) dari garis yang dimaksud ditunjukkan oleh koefisien b dalam persamaan umum (3.3.3) dan (13.4). Jika besarnya koefisien b telah ditentukan maka permasalahannya tinggal mencari nilai a pada persamaan (13.3). Jika ternyata nilai a yang diperoleh adalah nol maka persamaan garis yang terbentuk mengikuti pola yang ditunjukkan oleh persamaan (3.3.4).

Untuk mencari nilai a tersebut coba kita selesaikan persamaan umum pada (13.4) untuk nilai a, sehingga:

$$a = Y - bX \quad (3.3.5)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3.5.) di atas maka kita bisa memperoleh nilai a yang merupakan penggal garis (*intercept*) dengan sumbu vertikal Y.

<u>Contoh 3.1.</u>:

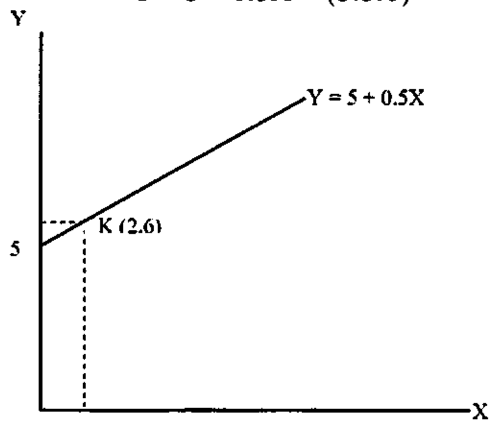
Tentukan persamaan sebuah garis dengan angka arah (*gradient*) sebesar 0.5 yang melewati titik K yang mempunyai koordinat (2,6) dan gambarkan garis tersebut.

Untuk memperoleh persamaan garis ini pertama-tama kita identifikasi terlebih dahulu besarnya koefisien b. Dalam hal ini nilai koefisien b besarnya sudah ditentukan atau diketahui, yaitu sebesar 0.5. Langkah selanjutnya adalah menemukan nilai konstanta a dengan mensubstitusikan nilai X dan Y dari titik yang ada dan nilai koefisien b kedalam persamaan (3.3.5.) sehingga diperoleh nilai:

$$a = 6 - (0.5 \times 2)$$
$$a = 6 - 1 = 5$$

Dengan demikian persamaan garis yang dimaksud adalah:

$$Y = 5 + 0.5X \quad (3.3.6)$$



gambar 3.12.

Contoh 3.2.:

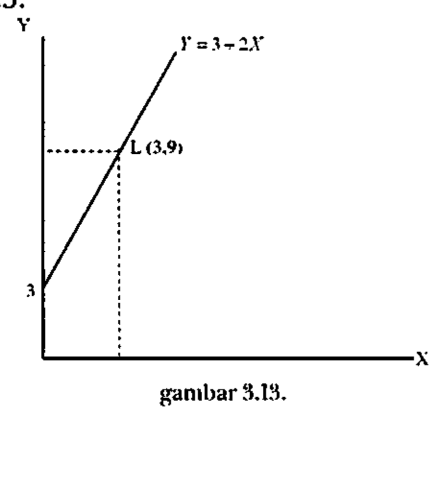
Bentuklah persamaan garis yang mempunyai angka arah (*gradient*) sebesar 2 dan melalui titik L dengan koordinat (3,9) dan gambarkan garis tersebut.

Dengan cara yang sama seperti yang ditempuh dalam menyelesaikan soal pada Contoh 3.1., maka besarnya nilai a dapat diperoleh, yaitu:

$$a = 9 - 2\,(3)$$
$$a = 9 - 6 = 3$$

Persamaan garisnya adalah: $Y = 3 + 2X$ (3.3.7)

Contoh 3.3.



gambar 3.13.

Catatan yang ada dalam perusahaan "Venus" menunjukkan bahwa penggunaan input variabel adalah konstan dengan tingkat penggunaan dalam jumlah tertentu untuk setiap satu unit output. Jika nilai uang dari input variable yang digunakan ini adalah sebesar 0.75, maka:

a. Susun persamaan garis dan gambarkan biaya variable yang ada
b. Jika biaya tetap yang tercatat dalam perusahaan adalah sebesar 4, susun dan gambarkanlah persamaan garis dari biaya total

Untuk menyusun persamaan dan menggambarkan biaya variabel maka perlu bantuan teori ekonomi mengenai perilaku biaya/input variable. Informasi yang diperoleh dari teori ekonomi sebagaimana telah didiskusikan di depan mengimplikasikan bahwa biaya variable selalu berasal dari titik pangkal dengan koordinat (0,0). Informasi tambahan yang disampaikan di atas yang mengatakan bahwa jumlah biaya variable yang besarnya 0.75 untuk setiap unit output memberikan informasi bahwa angka arah grafik (*gradient*) b adalah sebesar 0.75. Dengan demikian maka seseorang sudah berada dalam kasus di mana dia diminta untuk membuat persamaan garis yang berasal dari suatu titik yang mempunyai koordinat (0,0) dan dengan angka arah (*gradient*) sebesar 0.75.

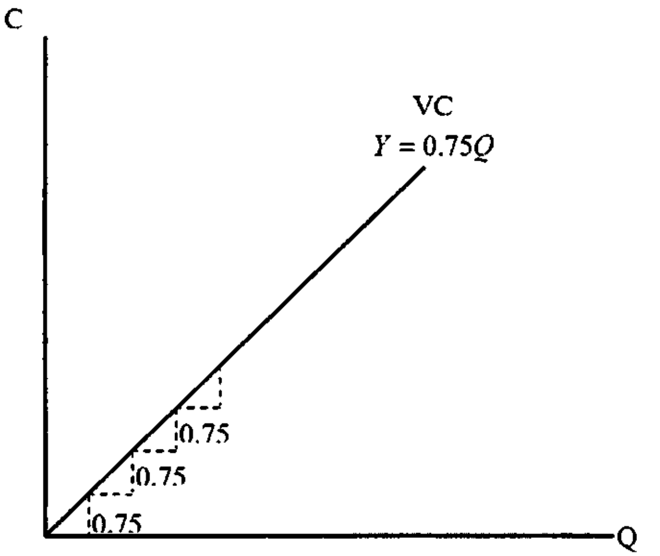
Sebagaimana dipaparkan di depan maka langkah yang perlu diambil adalah mencari konstanta dengan menggunakan rumus yang ada dalam persamaan (3.10.) sehingga besarnya a adalah:

$$a = 0 - 1(0) = 0$$

Dengan demikian nilai a adalah nol. Dengan demikian persamaan garisnya adalah

$$C = 0.75Q \quad (3.3.8)$$

Adapun representasi geometrik dari garis tersebut adalah:

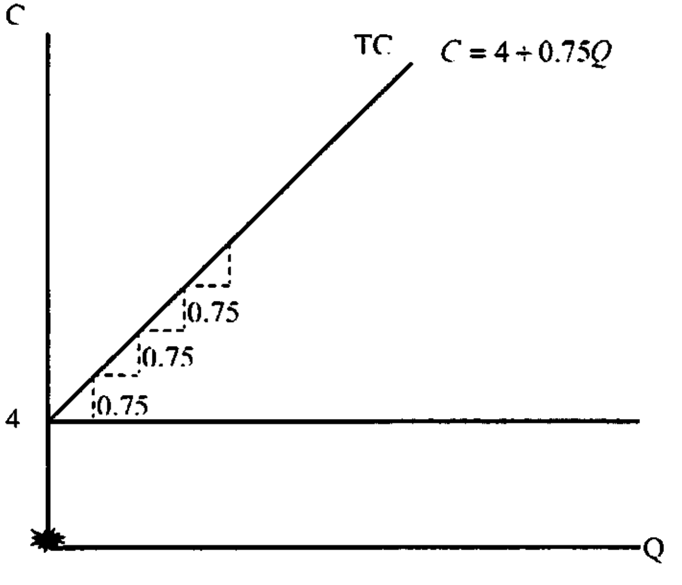


gambar 3.14.

Untuk menyusun persamaan garis dari biaya total cukup menambahkan biaya tetap yang ada ke dalam biaya variable sehingga diperoleh persamaan garis biaya total sebagai:

$$Y = 4+0.75X \quad (3.3.9)$$

Adapun gambar dari garis biaya total adalah:



gambar 3.15.

Contoh 3.4.

Perusahaan "Venus" menjual barang hasil produksinya dengan harga 2 per unit. Harga tersebut diberlakukan kepada siapapun secara tetap yaitu harga tidak berubah berapapun jumlah barang yang dibeli. Berdasar informasi ini buatlah persamaan garis yang menggambarkan Pendapatan Total (Total Revenue/TR) dari perusahaan tersebut, gambarkan pula garis tersebut.

Untuk menyusun persamaan garis pendapatan total (PT), maka perlu dilihat terlebih dahulu definisi aljabar dari pendapatan total tersebut. Menurut definisi aljabar pendapatan total (PT) atau *Total Revenue* (TR) adalah merupakan jumlah barang yang dijual dikalikan dengan harga barang tersebut. Hal ini disimbolkan sebagai:

$R = P \times Q$ (3.3.10)

Karena P bersifat konstan maka dia bisa dianggap sebagai koefisien yang dipunyai oleh Q. Dengan cara pandang seperti ini maka P tidak lain adalah angka arah (*gradient*) dari garis *total revenue* (TR) atau pendapatan total (PT).

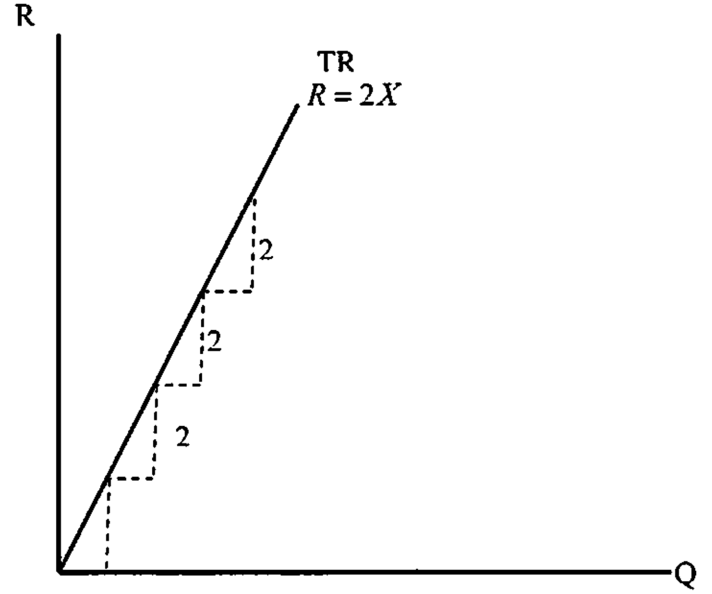
Sifat dasar dari *total revenue* (TR) atau pendapatan total (PT) adalah bahwasanya dia baru akan muncul/ada ketika kuantitas barang yang terjual (Q) juga sudah ada. Sebaliknya ketika jumlah barang yang terjual (Q) belum ada maka praktis TR ini juga belum ada atau besarnya sama dengan nol. Dengan demikian maka seseorang bisa memikirkan bahwa garis TR akan melalui titik origin yang mempunyai koordinat (0,0). Oleh karena itu dalam penyusunan garis TR dalam kasus ini maka seseorang harus sudah bisa mengetahui bahwa garis ini akan melalui titik (0,0) dengan angka arah gafik(*gradient*) sebesar P yang dalam hal ini adalah sebesar 2.

$a = 0 - 2(0) = 0$

Dengan demikian persmaan garis TR ini adalah:

$$Y = 2X \quad (3.3.11)$$

Adapun ekspresi grafisnya bisa dilihat pada gambar berikut:



gambar 3.16.

3.2.3.2. Menyusun Persamaan Garis Linear melalui Dua Titik

Dari dua buah titik bisa disusun suatu garis linear. Secara intuitif garis yang dimaksud bisa disusun dengan cara menghubungkan kedua titik tersebut. Garis yang menghubungkan kedua titik inilah garis yang dimaksudkan.

Adapun persamaan garis yang diperoleh melalui cara ini bisa disusun melalui formula berikut ini:

$$\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{X - X_1}{X_2 - X_1} \quad (3.3.12.)$$

Contoh 3.5.:

Susunlah persamaan garis melalui titik M dengan koordinat (2,4) dan titik N dengan koordinat (3,6), gambarkan juga garisnya.

Berbeda dengan penyusunan persamaan garis melalui satu titik sebagaimana disampaikan di atas, penyusunan persamaan garis melalui dua titik ini tidak memerlukan usaha mencari nilai konstanta a terlebih dahulu. Nilai konstanta dari persamaan garis yang akan dicari nantinya akan dengan sendirinya diperoleh secara langsung dengan menggunakan persamaan rumus (3.3.12.) di atas.

Guna memperoleh informasi yang akan dipakai untuk menyusun persamaan garis tersebut perlu kiranya disusun terlebih dahulu informasi yang ada dalam tabel berikut ini

Tabel 3.3.

Titik	Nomor	Koordinat	
		X	Y
M	1	2	4
N	2	3	6
		$X_2 - X_1 = 1$	$Y_2 - Y_1 = 2$

Dengan memasukkan semua informasi yang diperoleh dalam tabel 3.3. di atas maka akan diperoleh:

$$\frac{Y-4}{2}=\frac{X-2}{1}$$

Dengan mengalikan ruas kanan dan ruas kiri dengan bilangan dua (*Mengapa? Silahkan baca fondasi aljabar pada lampiran di akhir buku ini*) maka diperoleh:

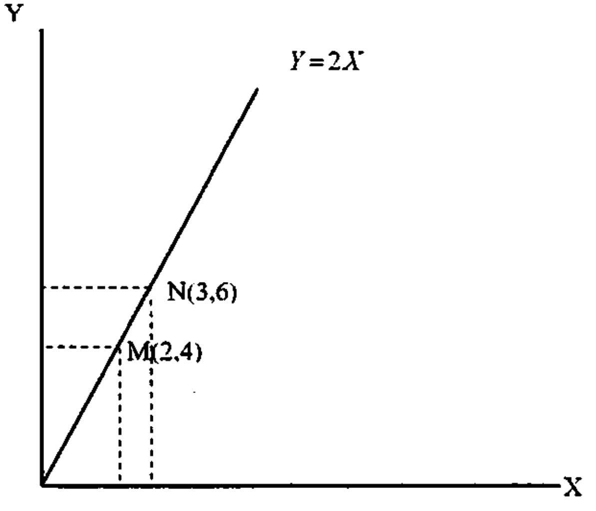
$$Y-4=\frac{2(X-2)}{1}$$

$$Y-4=2X-4$$

Dengan menambah ruas kanan dan ruas kiri dengan bilangan empat(*Mengapa?*) akhirnya diperoleh:

$$Y=2X \quad (3.3.13)$$

Persamaan yang diperoleh di atas merupakan persamaan garis yang dicari. Adapun gambar dari garis tersebut bisa dilihat di bawah ini.



gambar 3.17.

Contoh 3.6.:

Buatlah persamaan garis yang berasal dari titik H dengan koordinat (4,1) dan titik I dengan koordinat (2,5), gambarkan juga garisnya.

Dengan menggunakan cara yang sama sebagaimana yang kita tempuh dalam menyelesaikan Contoh 3.3., maka akan bisa diperoleh:

Tabel 3.4.

Titik	Nomor	Koordinat	
		X	Y
H	1	4	1
I	2	2	5
		$X_2 - X_1 = -2$	$Y_2 - Y_1 = 4$

Berdasar informasi yang diperoleh dari tabel 3.4. di atas, maka seterusnya informasi tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan 1.3.12., menjadi:

$$\frac{Y-1}{4} = \frac{X-4}{-2}$$

Dengan mengalikan ruas kanan dan ruas kiri dengan minus delapan, maka diperoleh:

$$-2Y + 2 = 4X - 16$$

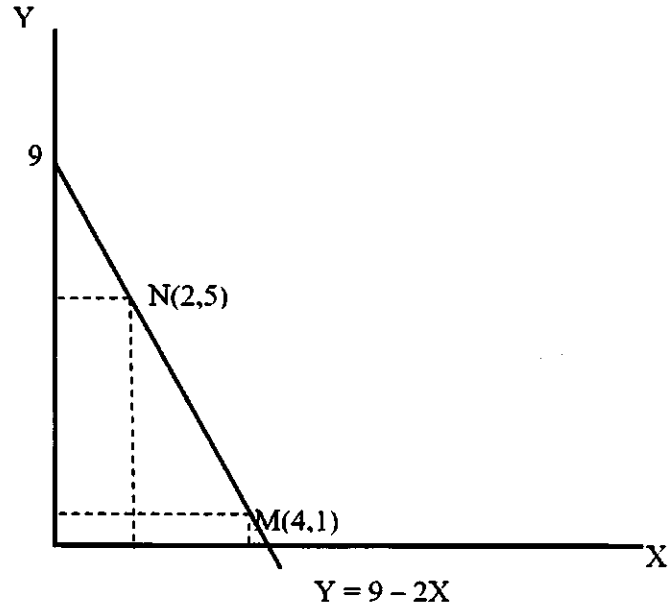
Selanjutnya dengan mengurangi ruas kanan dan ruas kiri dengan dua diperoleh:

$$-2Y = 4X - 18$$

Membagi ruas kanan dan ruas kiri dengan minus dua, maka akhirnya diperoleh persamaan garis:

$$Y = 9 - 2X \quad (3.3.14)$$

Adapun garis tersebut bisa digambarkan sebagai berikut:



gambar 3.18.

<u>Contoh 3.7.</u>:

Bambang mempunyai selera yang khas terhadap suatu barang. Perilaku pembeliannya bisa dilihat dari cara dia membelanjakan uangnya, yaitu ketika harga barang tersebut adalah Rp 10, maka jumlah barang yang dibeli sebesar 60 unit; Dan ketika harga barang yang bersangkutan adalah Rp 50, maka jumlah barang yang diminta adalah sebesar 20 unit. Berdasar informasi di atas, susunlah kurva permintaan yang mencerminkan perilaku pembelian Bambang.

Pada dasarnya kurva permintaan ini adalah merupakan sebuah garis linear sehingga penyusunannyapun mengikuti penyusunan garis linear. Hanya saja bedanya sumbu horizontal dalam kurva permintaan adalah Q yang menunjukkan jumlah barang yang diminta/dibeli dan sumbu vertikalnya adalah P yang merupakan harga barang yang bersangkutan.

Untuk penyusunan persamaan garis ini diperlukan suatu formula yang teranalogi dengan formula yang ada pada persamaan (3.3.12.), yaitu:

$$\frac{P-P_1}{P_2-P_1}=\frac{Q-Q_1}{Q_2-Q_1} \quad (3.3.15)$$

Untuk keperluan penyusunan kurva permintaan ini maka akan dilakukan teknik yang sama dengan teknik yang telah ditempuh pada penyelesaian soal pada Contoh 3.3. dan 3.4.. Langkah-langkah yang ditempuh adalah sebagai berikut:

Tabel 3.5. Informasi Pembelian oleh Bambang

Pembelian	
P (harga)	Q (jumlah yang dibeli)
Rp 10	60
Rp 50	20
$P_2 - P_1 = 40$	$Q_2 - Q_1 = -40$

Dengan memasukkan semua informasi yang ada pada tabel 3.5. kedalam formula dalam persamaan (3.3.15), maka diperoleh:

$$\frac{P-20}{40}=\frac{Q-60}{-40}$$

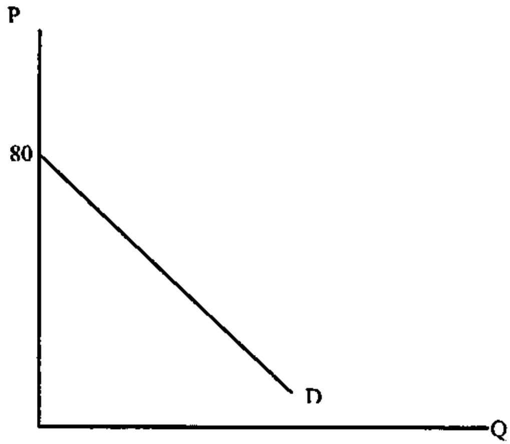
Dengan mengalikan ruas kanan dan ruas kiri dengan 40, maka diperoleh:

$$P - 20 = -Q + 60$$

Menambah ruas kanan dan ruas kiri dengan 20 maka diperoleh:

$$P = -Q + 80 \quad (3.3.16)$$

Ekspresi di atas merupakan fungsi permintaan dari Bambang. Adapun bentuk dari kurva permintaannya bisa digambarkan pada gambar di bawah ini.



gambar 3.19.

Contoh 3.8.:

Perusahaan "Venus" mempunyai catatan mengenai jumlah barang yang dipasok/ditawarkan ke pasar terkait dengan harga pasar yang terjadi. Catatan tersebut bisa dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 3.6.

P (harga)	Q (jumlah yang ditawarkan)
19	12
55	60

Berdasar pada informasi yang ada susunlah kurva penawaran dari "Venus" tersebut.

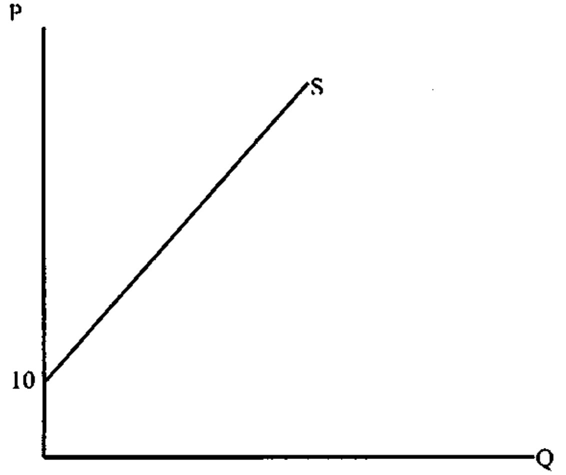
Kasus ini adalah sama dengan yang terjadi pada Contoh 3.5. yaitu penyusunan persamaan garis linear. Untuk itu langkah yang perlu ditempuh adalah dengan memasukkan semua informasi yang ada kedalam persamaan 3.3.15., sehingga diperoleh:

$$\frac{P-19}{55-19}=\frac{Q-12}{60-12} \; atau \; \frac{P-19}{36}=\frac{Q-12}{48}$$
$$P-19=0.75Q-9$$

Dengan menambah ruas kanan dan ruas kiri dengan 29, maka diperoleh:

$$P=0.75Q+10 \quad (3.3.17)$$

Ekspresi terakhir di atas menunjukkan persamaan/ fungsi penawaran. Adapun gambar dari kurva permintaan bisa digambarkan berikut ini:



gambar 3.20.

3.3. Sistem Persamaan Linier

Dalam banyak kasus bisa ditemui adanya interaksi antara lebih dari satu persamaan linier. Karena persamaan-persamaan tersebut berinteraksi satu sama lain maka persamaan-persamaan tersebut membentuk suatu sistem persamaan linier. Karena sifat dari persamaan-persamaan yang ada dalam sistem tersebut adalah interaksional maka akan selalu ada usaha untuk mengetahui hasil akhir dari interaksi yang terjadi. Hasil akhir interaksi ini adalah merupakan penyelesaian atas sistem persamaan tersebut. Adapun penyelesaian yang dimaksud adalah ditemukannya nilai Y dan X yang memenuhi kedua persamaan yang ada dalam sistem tersebut

Dalam sistem persamaan dikenal adanya orde yang menunjukkan berapa jumlah persamaan dan jumlah variable yang ada dalam sistem. Suatu sistem persamaan akan bisa diselesaikan jika diketahui bahwa sistem tersebut mempunyai orde yang jelas ataupun sub orde yang konsisten. Adapun tengara bahwa suatu sistem persamaan mempunyai orde tertentu jika jumlah variable dan jumlah persamaan adalah sama. Suatu sistem persamaan disebut mempunyai orde dua jika jumlah persamaan dan jumlah variable yang ada adalah dua.

Untuk memperjelas masalah ini marilah kita lihat sistem persamaan di bawah ini.

$$X + 2Y = 12 \quad (3.3.18)$$
$$X - Y = 3 \quad (3.3.19)$$
$$Y = 2 \quad (3.3.20)$$

Sistem persamaan yang dibentuk oleh tiga persamaan di atas terlihat tidak mempunyai orde yang jelas. Hal ini disebabkan karena dalam sistem tersebut terdapat tiga persamaan, yaitu: persamaan (3.3.18), persamaan (3.3.19) dan persamaan (3.3.20). Sementara jumlah variable yang ada dalam sistem tersebut hanyalah dua, yaitu: X dan Y. Bisa diketahui bahwa dari sistem tersebut tidak bisa diperoleh hasil yang konsisten. Hal ini disebabkan karena dari persamaan (3.3.18) dan persamaan (3.3.19) akan menghasilkan nilai Y yang besarnya sama dengan 3 yang tentu saja bertentangan dengan persamaan (3.3.20).

Hanya jika besarnya nilai Y pada persamaan (3.3.20) adalah sama dengan 3 maka sistem persamaan yang dibentuk oleh tiga persamaan di atas adalah konsisten. Dalam kasus di mana (misalnya) besarnya nilai Y pada persamaan (3.3.20) adalah 3, maka sistem persamaan di atas mempunyai sub orde yang konsisten. Hal ini dikarenakan jika seseorang mengambil dua persamaan yang manapun dari sistem tersebut maka akan tetap bisa memperoleh hasil yang konsisten.

Untuk mengeksplorasi lebih jauh mengenai hal ini pertimbangkanlah sistem persamaan berikut ini.

$$X + Y + 2Z = 8 \quad (3.3.21)$$
$$X - 4Z = 14 \quad (3.3.22)$$

Sistem persamaan yang dibentuk oleh persamaan (3.3.21) dan persamaan (3.3.22) di atas mempunyai tiga variable, yaitu: X, Y dan Z. Namun sistem tersebut hanya mempunyai dua persamaan. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa sistem tersebut tidak mempunyai orde yang jelas. Sementara sub orde yang ada tidak membantu penyelesaian sistem tersebut.

3.3.1. Sistem Persamaan Linier Orde Dua

Sistem persamaan linier orde dua ini merupakan sistem persamaan orde terendah. Karena orde yang dipunyai yang masih rendah maka penyelesaian yang dicari akan bisa ditemukan dengan cara-cara yang sederhana. Ada dua teknik yang biasa ditempuh untuk mencari penyelesaian atas sistem persamaan tersebut. Pembahasan di bawah ini menyajikan teknik untuk menyelesaikan sistem persamaan tersebut.

3.3.1.1. Penyelesaian dengan Teknik Eliminasi

Pertimbangkan bentuk implisit dari persamaan-persamaan berikut ini:

$$27Y + 2X + 58 = 0 \quad (3.3.23)$$
$$2Y - X + 2 = 0 \quad (3.3.24)$$

Untuk mencari penyelesaian atas sistem dari dua persamaan yang disebut di atas maka bisa ditempuh dengan cara mengeliminasi salah satu terma: X atau Y. Pemilihan terma mana yang akan dieliminasi bergantung pada struktur dari persamaan- persamaan yang ada.

Langkah-langkah Eliminasi

Dalam melakukan eliminasi tersebut akan diperlukan dua langkah yang perlu diikuti sebagai berikut ini.

a. **Menyamakan Koefisien dari Terma yang Menjadi Target**

Eliminasi bisa dilakukan dengan cara membuat koefisien pada terma yang akan dieliminasi adalah sama pada kedua persamaan yang ada. Anggap bahwa kita memilih secara sebarang terma mana yang akan dieliminasi pada kedua persamaan di atas dan pilihan jatuh pada terma Y. Untuk mengeliminasi Y maka hal ini mensyaratkan kita untuk menyamakan koefisien Y pada kedua persamaan di atas dengan cara mengalikan persamaan (3.3.23) dengan bilangan 2 dan mengalikan persamaan (3.3.24) dengan bilangan 27. Tentu saja hal ini akan terasa kurang efisien karena kita harus bekerja dua kali yaitu melakukan operasi pada kedua persamaan di atas yang berarti melakukan operasi dua kali.

Untuk memperoleh penyelesaian yang efisien, maka perlu terlebih dahulu dicermati terma mana: X atau Y yang bisa dieliminasi dengan cara yang lebih sederhana. Kita bisa melihat bahwa terma X yang ada pada persamaan (3.3.24) mempunyai koefisien 1 (satu) sehingga memberikan efek psikologis bahwa akan terasa lebih mudah jika proses eliminasi didasarkan pada terma tersebut. Hal ini kemudian bisa dilakukan dengan mengalikan persamaan (3.3.24) dengan bilangan 2 agar bisa diperoleh koefisien X pada persamaan ini yang besarnya sama dengan koefisien X yang ada pada persamaan (3.3.23). Perlu dicatat bahwa pada kasus ini operasi hanya dilakukan terhadap persamaan (3.3.24) saja yang berarti hanya dilakukan sekali saja. Bandingkan dengan kasus di mana jika kita melakukan eliminasi terhadap Y yang harus melakukan operasi sebanyak dua kali. Dengan melakukan hal seperti disebut di atas maka kedua persamaan di atas bisa dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 27Y & + & 2X & + & 58 & = & 0 \\ 4Y & - & 2X & + & 4 & = & 0 \quad (+) \\ \hline 31Y & & & + & 62 & = & 0 \\ & & & & Y & = & -2 \end{array}$$

b. **Melakukan Substitusi atas Hasil yang Sudah Diperoleh**

Guna memperoleh koordinat secara lengkap dari penyelesaian yang dicari maka nilai Y yang telah didapat di atas perlu disubstitusikan ke dalam persamaan manapun dari keduanya sehingga akan diperoleh nilai dari X sebagaimana ditemukan berikut ini.

Jika nilai Y yang telah diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3.24), maka akan diperoleh:

$$2(-2) - X + 2 = 0$$
$$X = -2$$

Dengan ditemukannya nilai X tersebut, maka bisa ditemukan juga penyelesaian atas sistem tersebut yaitu (-2,-2).

3.3.1.2. Penyelesaian dengan Teknik Substitusi

Selain teknik eliminasi sebagaimana disebut di atas, pemotongan garis bisa juga dilakukan dengan teknik substitusi. Untuk melakukan hal ini diperlukan paling tidak dua langkah untuk bisa sampai pada penyelesaian yang diinginkan.

a. Penyelesaian Internal atas Salah Satu Persamaan

Langkah ini ditujukan untuk memperoleh nilai dari salah satu besaran X atau Y. Anggap kita memilih besaran X atau Y secara sebarang yang terhadapnya dilakukan penyelesaian. Anggap pula di sini bahwa besaran yang akan diselesaikan adalah besaran Y pada persamaan pertama (3.3.23). Pada persamaan (3.3.23) tersebut besaran Y mempunyai koefisien sebesar 27. Hal ini mengimplikasikan bahwa langkah untuk menemukan penyelesaian atas Y pada persamaan ini memerlukan dua langkah yakni penambahan dan pembagian. Selain itu hasil bagi yang diperoleh pun merupakan bilangan pecah yang tentu saja akan menuntut operasi aritmatika yang lebih banyak.

Untuk itu sebelum melakukan penyelesaian lebih baik dicermati terlebih dahulu persamaan mana dan besaran yang mana yang akan diselesaikan. Jika dilihat besaran X pada persamaan (3.3.24) maka besaran ini bisa dipertimbangkan sebagai besaran yang akan diselesaikan. Hal ini mengingat bahwa besaran tersebut mempunyai koefisien sebesar satu. Dengan sifat seperti ini maka operasi aljabar yang dilakukan hanyalah sekali saja yang bisa dilihat pada pemaparan berikut ini:

$$2Y - X + 2 = 0$$

Dengan mengurangkan pada ruas kanan dan ruas kiri sesar (2Y+2), maka persamaan tersebut bisa diselesaikan atas X, yaitu:

$$-X = -(2Y+2)$$

Sehingga,

$$X = 2Y+2$$

b. Substitusi Hasil kedalam Persamaan

Setelah solusi terhadap X diperoleh, maka langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan hasil yang diperoleh ke dalam persamaan lain (3.3.23). Sehingga akan diperoleh hasil berikut ini:

$$27Y+2(2Y+2)+58 = 0$$
$$27Y+4Y+4+58 = 0$$
$$31Y = -62$$
$$Y = -2$$

Langkah selanjutnya yang perlu diambil setelah ditemukannya nilai dari besaran Y adalah dengan mensubstitusikan nilai Y tersebut kedalam salah satu persamaan. Jika kita pilih persamaan (3.3.24) maka akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$2(-2) - X + 2 = 0$$
$$X = -2$$

Dengan demikian hasil penelusuran mendapati bahwa penyelesaian atas sistem tersebut adalah (-2,-2).

Periksalah hasil tersebut, ternyata tidak ada perbedaan dengan hasil yang diperoleh melalui cara eliminasi sebagaimana dipaparkan pada bagian sebelumnya.

3.3.1.3. Polarisasi Sistem Persamaan Linier

Dalam banyak kasus ditemui adanya sistem yang darinya tidak diperoleh sama sekali adanya penyelesaian. Di pihak lain juga ada suatu sistem yang mempunyai banyak penyelesaian bahkan jumlah penyelesaiannya adalah tak terhingga. Sebagai ilustrasi pandanglah sistem-sistem dari persamaan-persamaan linier berikut ini:

$2Y = 2X + 8$	(3.3.25)	$Y = 2X + 8$	(3.3.27)
$Y = X + 4$	(3.3.26)	$Y = 2X + 6$	(3.3.28)

Sistem yang dibentuk oleh persamaan (3.3.25) dan persamaan (3.3.26) tidak bisa diperoleh penyelesaian yang unik. Lihatlah, jika seseorang melakukan penyelesaian dengan metode substitusi: mensubstitusikan nilai Y yang ada dalam persamaan (3.3.26) ke dalam persamaan (3.3.25), maka diperoleh:

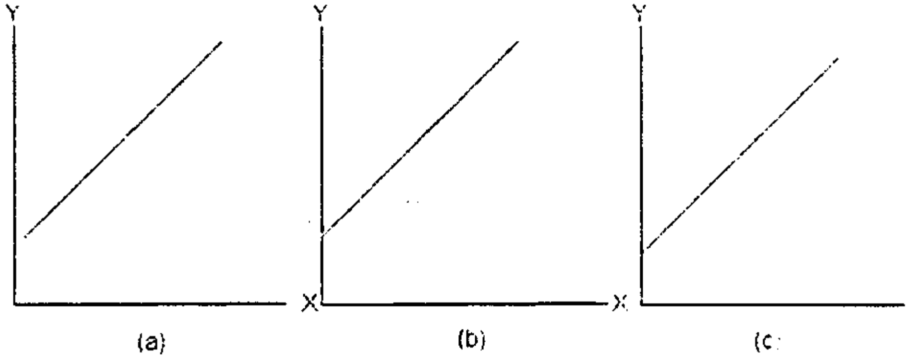
$$2X + 8 = 2X + 8$$
$$0 = 0$$

Sementara sistem persamaan yang dibentuk oleh persamaan (3.3.27) dan persamann (3.3.28) tidak bisa diperoleh adanya penyelesaian sama sekali. Hal ini disebabkan karena masing-masing persamaan yang ada dalam sistem tersebut menciptakan situasi yang tidak konsisten antara satu dengan lainnya. Hal ini bisa dilihat ketika dilakukan penyelesaian melalui metode substitusi: substitusikan Y yang ada pada persamaan (3.3.28) ke dalam persamaan (3.3.27) maka akan diperoleh solusi:

$$2X + 6 = 2X + 8$$
$$6 = 8$$
$$\text{(tidak konsisten)}$$

3.3.1.4. Ekspresi Geometri dari Sistem Persamaan Linier Oder Dua

Pada pembahasan di seksi terakhir di atas pembaca pemula akan mengalami kesulitan melihat hasil yang dihadapinya. Hal ini menunjukkan pentingnya pendekatan geometrik atas peremasalahan ini. Untuk itu perlu dihadirkan pendekatan geometrik atas hal tersebut yang bisa membuat semuanya menjadi jelas. Sebagai ilustrasi di bawah ini disajikan ekspresi geometrik dari berbagai bentuk persamaan.



gambar 3.21.

Secara geometrik, dua buah garis yang keduanya sama-sama bersifat linear akan mempunyai titik potong pada satu titik tertentu hanya jika mereka mempunyai angka arah (*gradient*) yang berbeda. Hal inilah yang merupakan kriteria dalam mencari penyelesaian atas suatu sistem persamaan linier.

Pada panel (a) di atas kedua garis mempunyai angka arah yang berbeda sehingga mereka berpotongan pada satu titik. Mengingat bahwa setiap garis linier merepresentasikan persamaan linier maka sebuah titik potong antara dua buah garis merupakan titik persekutuan antara kedua garis. Dengan demikian titik potong tersebut merupakan suatu titik yang memenuhi kedua persamaan dalam sistem yang bersangkutan. Oleh karenanya titik potong tersebut tidak lain adalah penyelesaian dari sistem persamaan yang dibentuk oleh persamaan-persamaan garis linier yang terlibat.

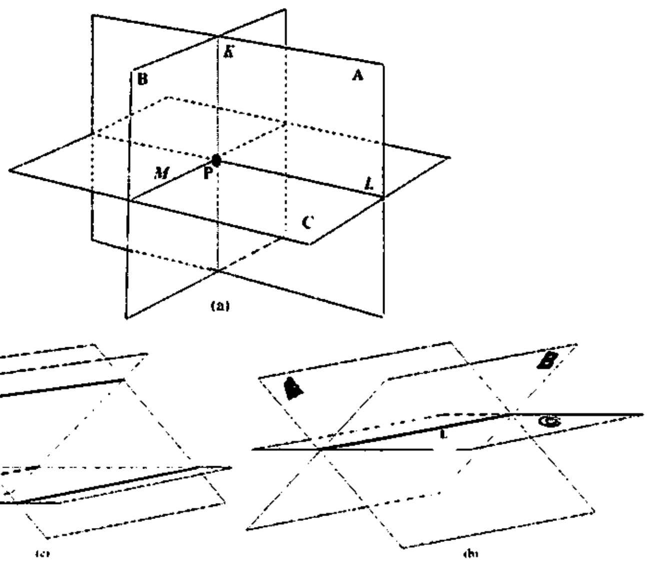
Sistem persamaan yang dibentuk oleh persamaan (3.3.23) dan persamaan (3.3.24) di atas mempunyai angka arah (*gradient*) yang berbeda dan oleh karenanya mempunyai titik potong. Adapun titik potong tersebut sudah teridentifikasi pada koordinat (-2,-2) yang merupakan penyelesaian atas sistem persamaan tersebut.

Sementara pada panel (b) kedua garis saling berimpit satu sama lain. Dua garis yang berimpit walaupun nampak mempunyai ekspresi aljabar yang sama namun sebenarnya jika dicermati terlihat bahwa garis yang satu merupakan kelipatan tertentu dari garis yang lain. Pada sistem yang dibentuk oleh persamaan garis (3.3.25) dan persamaan garis (3.3.26), persamaan garis (3.3.25) merupakan kelipatan dua dari garis (3.3.26). Secara jelas jika persamaan pada garis (3.3.26) dikalikan dengan bilangan dua untuk kedua ruas maka persamaan tersebut akan tepat berubah menjadi persamaan (3.3.25). Sebagai akibatnya maka semua titik yang ada pada kedua garis tersebut merupakan penyelesaian atas sistem tersebut.

Adapun pada panel (c) kedua garis yang ada mempunyai angka arah yang sama yang berarti kedua garis tersebut adalah sejajar. Karena sejajar, maka keduanya tidak akan bisa berpotongan satu sama lain. Hal ini mempunyai konsekuensi bahwa sistem yang dibentuk oleh kedua garis tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Pada sistem yang dibentuk oleh persamaan (3.3.27) dan persamaan (3.3.28) bisa didapati bahwa kedua garis yang ada mempunyai angka arah yang sama sehingga tidak bisa ditemukan penyelesiaian atas sistem tersebut karena hasil yang diperoleh adalah tidak konsisten.

3.3.2. Sistem Persamaan Linier Orde Tiga

Sistem persamaan linier yang ada tidak terbatas pada sistem persamaan linier orde dua saja namun juga masih ada orde-orde di atasnya lagi yang merupakan orde tinggi. Sebagai explorasi awal di sini akan dihadirkan diskusi mengenai sistem persamaan linier orde tiga. Sebelum mendiskusikan bagaimana pendekatan dan teknik yang ditempuh untuk penyelesaian sistem persamaan linier orde tiga akan disajikan paparan geometrik yang merepresentasikan sistem persamaan tersebut sebagai landasan pemahaman konsep. Adapun beberapa ekspresi dari sistem persamaan linier orde tiga bisa berupa satu di antara gambar berikut ini:



gambar 3.22.

Pada panel (a), panel (b) dan panel (c) gambar di atas terlihat adanya tiga bidang, yaitu: bidang A, bidang B dan bidang C. Masing-masing bidang merupakan representasi dari suatu persamaan linier tertentu. Dengan demikian tiga bidang yang ada secara bersama-sama dan saling mengiris satu sama lain merupakan representasi dari sistem persamaan linier orde tiga.

Pada panel (a), terlihat bahwa titik P merupakan titik persekutuan antara ketiga bidang sehingga bisa dikatakan bahwa titik P merupakan titik yang memenuhi tiga bidang tersebut. Oleh karenanya titik P merupakan penyelesaian bagi sistem tersebut. Karena titik P merupakan satu-satunya penyelesaian yang ada atas sistem persamaan tersebut maka bisa dikatakan bahwa sifat penyelesaian yang ada adalah unik.

Pada panel (b), garis L merupakan garis persekutuan atau garis irisan dari ketiga bidang yang ada. Dalam kasus ini maka penyelesaian atas sistem tersebut terletak pada garis L. Semua titik yang berada pada garis L merupakan penyelesaian atas sistem persamaan tersebut. Hal ini berarti bahwa walaupun sistem persamaan yang seperti ini mempunyai penyelesaian namun sifat dari penyelesaian tersebut bulan penyelesaian yang unik.

Pada panel (c) terlihat bahwa tidak ada satu titik atau garis sekalipun yang merupakan irisan dari ketiga bidang yang ada. Hal ini menunjukkan bahwa sistem yang dibentuk oleh ketiga persamaan tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Dari representasi geometrik di atas kemudian bisa dibentuk ekspresi aljabar dari sistem persamaan linier orde tiga yang dimaksudkan. Ekspresi berikut ini merupakan sistem persamaan linier orde tiga.

$$X - 2Y + Z = 10 \quad (3.3.29)$$
$$3X + Y + 2Z = 8 \quad (3.3.30)$$
$$2X + 4Y - Z = 5 \quad (3.3.31)$$

Sebelum mencari penyelesaian atas sistem persamaan di atas perlu terlebih dahulu kita diskusikan konsep dari sistem persamaan orde tiga tersebut. Untuk keperluan ini pertimbangkan panel (a) gambar di atas. Jika bidang A dan bidang B diiriskan maka akan diperoleh suatu garis yang merupakan irisan dari keduanya. Dalam kasus ini garis irisan yang diperoleh adalah garis K. Seterusnya jika bidang A diiriskan dengan bidang C maka akan diperoleh garis irisan L. Seterusnya jika garis K, yang merupakan irisan dari bidang A dan B, dipotongkan dengan garis L, yang merupakan irisan dari bidang A dan bidang C, maka titik potong yang diperoleh adalah titik P yang merupakan penyelesaian atas sistem persamaan tersebut.

Penyelesaian yang sama juga bisa diperoleh melalui cara yang lain yaitu dengan mengiriskan bidang A dan bidang B dengan memperoleh garis irisan K. Kemudian mengiriskan bidang B dan bidang C yang memperoleh garis irisan M. Selanjutnya memotongkan garis K dan garis M diperoleh titik P yang merupakan penyelesaian atas sistem persamaan di atas.

Lihatlah walaupun cara yang ditempuh pada pendekatan pertama berbeda dengan pendekatan kedua namun keduanya berakhir pada hasil yang sama yaitu titik P. Hal yang sama akan ditemui pada kasus yang direpresentasikan oleh panel (b) gambar di atas.

Dengan berdasar pada konsep yang dipaparkan di atas, maka penyelesaian atas sistem persamaan linier yang direpresentasikan oleh persamaan (3.3.29), persamaan (3.3.30) dan persamaan (3.3.31) di atas bisa dicari penyelesaiannya dengan cara berikut ini.

Pertama iriskan bidang A dan bidang B dengan mengeliminasi salah satu variable yang ada sehingga bidang yang ada tereduksi menjadi garis. Teknik yang dipakai dalam hal ini adalah sama dengan yang telah digunakan pada teknik eliminasi yang dipakai dalam pemotongan garis, yaitu:

$$
\begin{array}{lrr}
(3.3.29):\ X - 2Y + Z = 10 & & \\
2(3.3.30):\ 6X + 2Y + 4Z = 16 & & \\
\text{-----------------------------} \ (+) & & \\
7X \qquad + 5Z = 26 & & (3.3.32)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrr}
2(3.3.29):\ 2X - 4Y + 2Z = 20 & & \\
(3.3.31):\ 2X + 4Y - Z = 5 & & \\
\text{-----------------------------} \ (+) & & \\
4X + Z = 25 & & \\
Z = -4X + 25 & & (3.3.33)
\end{array}
$$

Terlihat dari pengirisan antara bidang A dan bidang B diperoleh garis (3.3.32) sementara dari pengirisan antara bidang A dan bidang C diperoleh garis (3.3.33). Selanjutnya untuk memperoleh satu titik yang merupakan penyelesaian atas sistem persamaan linier di atas maka dua garis yang sudah diperoleh di atas perlu dipotongkan satu sama lain dengan teknik susbstitusi sebagai berikut ini:

$$
\begin{aligned}
(3.3.32):\ 7X + 5(-4X + 25) &= 26 \\
7X - 20X + 125 &= 26 \\
-13X &= 26 - 125 \\
-13X &= -99 \\
X &= 7.61
\end{aligned}
$$

Selanjutnya nilai X yang sudah diperoleh disubstitusikan kedalam persamaan (3.3.32) sehingga:

$$Z = -4(7.61) + 25$$
$$Z = -30.44 + 25$$
$$Z = -5.44$$

Selanjutnya nilai X dan Z yang sudah diperoleh disubstitusikan kedalam salah satu persamaan yang ada dalam sistem sehingga:

$$7.61 - 2Y + -5.44 = 10 \ (3.3.29)$$
$$2.17 - 2Y = 10$$
$$-2Y = 10 - 2.17$$
$$Y = -7.83$$
$$Y = -3.915$$

Dengan demikian maka koordinat titik P yang merupakan penyelesaian atas sistem di atas adalah P: (7.61, -3.915, -5.44).

Untuk pemahaman lebih jauh pertimbangkanlah sistem persamaan berikut ini:

Bidang H	$2X + 3Y - Z = 8$	(3.3.34)
Bidang I	$X + 2Y + Z = 7$	(3.3.35)
Bidang J	$5X + 8Y - Z = 23$	(3.3.36)

Dari sistem persamaan linier yang dibentuk oleh ketiga bidang di atas: bidang H, bidang I dan bidang J, akan diselidiki eksistensi dari penyelesaiannya. Untuk kepentingan ini bidang H dan bidang I diiriskan satu dengan yang lain.

$$\begin{array}{rl} 2X + 3Y - Z = 8 & (H) \\ X + 2Y + Z = 7 & (I) \\ \hline 3X + 5Y \quad = 15 & (K) \end{array} +$$

Seterusnya bidang I dan bidang J akan diiriskan sebagaimana berikut ini:

$$\begin{array}{rl} X + 2Y + Z = 7 & (I) \\ 5X + 8Y - Z = 23 & (J) \\ \hline 6X + 10Y \quad = 30 & (L) \end{array} +$$

Selanjutnya dari dua garis yang diperoleh dari pengirisan bidang-bidang yang ada di atas: garis K dan garis L, akan diselidiki eksistensi penyelesaiannya dengan cara memotongkan keduanya menjadi:

$$\begin{array}{rl} 6X + 10Y \quad = 30; & 2(K) \\ 6X + 10Y \quad = 30; & (L) \\ \hline 0 + 0 \quad = 0 & \end{array} -$$

Hasil yang diperoleh di atas menunjukkan bahwa tidak ada solusi yang unik bagi sistem persamaan di atas. Hal ini bisa dilihat melalui pembandingan antara garis K dan garis L yang darinya bisa diketahui bahwa L mempunyai ukuran yang besarnya sama dengan dua kali L. Ekspresi geometrik dari hal ini menunjukkan bahwa kedua garis K dan L saling berimpit. Situasi ini merupakan representasi aljabar dari panel (b) yang ada dalam gambar di atas.

Selanjutnya perhatikanlah sistem persamaan berikut ini:

$$3X + Y - 2Z = 15 \ (P) \qquad (3.3.37)$$

$$2X - Y + 2Z = 5 \ (Q) \qquad (3.3.38)$$

$$X - Y + 2Z = 3 \ (R) \qquad (3.3.39)$$

Dari ketiga bidang yang membentuk sistem persamaan yaitu: bidang P, bidang Q dan bidang R akan dicoba dlakukan penyelidikan apakah terdapat penyelesaian yang memenuhi ketiga persamaan di atas. Untuk kepentingan ini maka bidang P dan bidang Q akan diiriskan satu sama lain sehinga memperoleh satu garis irisan berikut ini.

$$\begin{array}{ll} 3X + Y - 2Z = 15 \ (P) & \\ \underline{2X - Y + 2Z = 5 \ (Q)} & + \\ 5X \qquad\qquad = 20 & \\ X \qquad\qquad = 4 & \end{array}$$

Seterusnya bidang Q dan bidang R akan dipotongkan satu dengan yang lain sehingga diperoleh satu garis irisan berikut ini:

$$\begin{array}{ll} 2X - Y + 2Z = 5 \ (Q) & \\ \underline{X - Y + 2Z = 3 \ (R)} & (-) \\ X \qquad\qquad = 2 \text{ (tidak konsisten)} & \end{array}$$

Demikian pula seandainya penyelesaian dicari melalui pengirisan bidang P dan bidang R, maka hasilnya adalah sebuah garis irisan berikut ini.

$$\begin{array}{ll} 3X + Y - 2Z = 15 \ (P) & \\ \underline{X - Y + 2Z = 3 \ (R)} & + \\ 4X \qquad\qquad = 18 & \\ X \qquad\qquad = 4.5 \text{ (tidak konsisten)} & \end{array}$$

Ternyata dari sistem persamaan yang dibentuk oleh ketiga bidang di atas: Bidang P, bidang Q dan bidang R tidak bisa diperoleh adanya penyelesaian. Hal ini merupakan situasi yang mirip dengan panel (c) pada Gambar 3.22 di atas.

3.4. Terapan Ekonomi dan Bisnis

Sistem persamaan garis yang dibicarakan pada bagian sebelumnya banyak digunakan dalam berbagai analisis ekonomi dan bisnis. Mengingat bahwa penyelesaian dari sistem persamaan garis tidak lain adalah perpotongan dari kedua garis maka akan menjadi sangat penting untuk mengidentifikasi titik potong dari kedua garis tersebut. Usaha untuk menemukan titik potong tersebut akan memberi manfaat analitis yang besar. Misalnya jika salah satu garis bergeser (berubah nilai konstantanya) maka seberapa jauh titik potong yang baru tersebut berubah dari titik potong yang lama dalam hal nilai X atau nilai Y nya saja. Issue lain yang terkait dengan hal ini adalah bagaimana pergesaran dari masing-masing garis tersebut mempunyai dampak pada titik potong garis yang terjadi. Hal-hal semacam ini akan banyak ditemui dalam analisis ekonomi maupun bisnis. Pada seksi-seksi berikut ini akan diberikan diskusi mengenai terapan dari konsep tersebut pada berbagai area yang menggunakan konsep tersebut dalam analisis mereka.

3.4.1. Keseimbangan Pasar

Konsep keseimbangan pasar telah menjadi konsep dasar dalam analisis ekonomi. Dengan konsep ini para analis akan bisa mengetahui tingkat harga pasar dan jumlah barang yang terjadi pada kondisi keseimbangan tersebut.

Keseimbangan pasar didefinisikan sebagai suatu kondisi di mana tidak ada lagi kecenderungan bagi para pelaku pasar untuk bergerak ke arah manapun: naik atau turun (equilibrium) dari posisi yang ada. Dalam kasus ini para pelaku pasar yang dimaksud adalah para pemasok (*supplier*) dan pembeli (*demander*). Tidak adanya kecenderungan untuk bergerak ini disebabkan karena tidak adanya lagi power (kekuatan) yang tersisa yang mampu mendorong para pelaku pasar. Power yang mampu mendorong para pelaku pasar adalah adanya kelebihan pasokan (*excess supply*) atau kelebihan permintaan (*excess demand*). Dalam ekspresi geometri, tidak adanya kelebihan pasokan (*excess supply*) atau kelebihan permintaan (*excess* *demand*) ditunjukkan oleh perpotongan kurva penawaran dan kurva permintaan. Dengan kemampuan seseorang untuk mengidentifikasi letak dari titik potong antara kedua kurva ini akan bisa mengetahui seberapa besar jumlah barang yang diminta dan harga yang terjadi untuk jumlah penjualan tersebut.

Contoh 3.9.

Sebagai ilustrasi marilah kita hadirkan lagi di sini permaslahan yang diangkat dalam Contoh 3.7. dan Contoh 3.8. Anggaplah bahwa Bambang adalah pembeli satu-satunya di pasar begitu juga perusahaan Venus adalah produsen satu-satunya di pasar. Indentifikasikan pada kondisi keseimbangan pasar, berapa banyak jumlah barang yang dipasok/diminta dan pada tingkat harga berapa keseimbangan tersebut terjadi?

Untuk keperluan ini marilah kedua persamaan penawaran dan permintaan yang dimaksud kita hadirkan di sini sebagai dipaparkan berikut ini:

Kurva Penawaran: $P = 0.75Q + 10$ (3.3.40)

Kurva Permintaan: $P = -Q + 80$ (3.3.41)

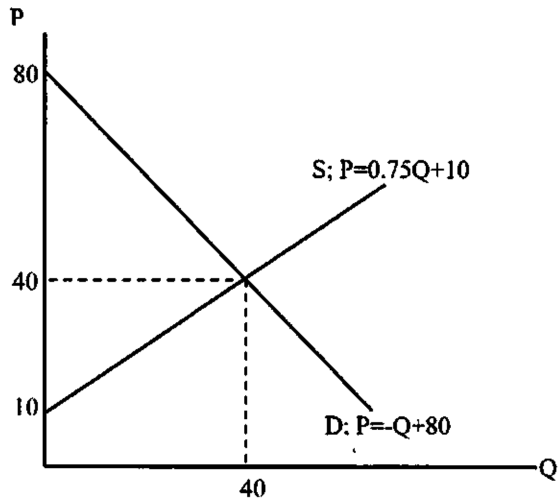
Sesuai dengan teknik yang sudah dipaparkan di depan, maka kita harus mengurangkan kurva permintaan dari kurva penawaran untuk mengidentifikasi titik potong (keseimbangan), sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{ll} P = 0.75Q + 10 & \\ P = -Q + 80 & \\ \hline 0 = 1.75Q - 70 & (-) \\ Q = 40 & \end{array}$$

Dengan nilai Q yang didapat bisa dicari nilai P yaitu dengan mensubstitusikan nilai Q tersebut ke dalam persamaan yang manapun, kita pilih saja persamaan permintaan, sehingga diperoleh:

$$P = -40 + 80$$
$$P = 40$$

Dengan demikian pada kondisi keseimbangan, harga yang terbentuk adalah sebesar 40 dengan jumlah barang yang dipasok/diminta adalah sebesar 40.



gambar 3.23.

3.4.2. Analisis Titik Impas (*Break-even-pointAnalysis*)

Titik impas atau yang biasa dikenal sebagai *break-even point* menunjukkan suatu kondisi di mana suatu unit bisnis berada dalam perbatasan (*border*) antara situasi memperoleh keuntungan dan menderita kerugian. Dengan demikian jika suatu unit bisnis berada tepat pada titik impas ini maka unit bisnis tersebut tidak memperoleh keuntungan maupun menderita kerugian. Analisis pada area ini sangat diperlukan dalam manajemen bisnis. Dengan mengetahui posisi titik impas ini maka unit usaha tersebut akan mampu mengetahui pada tingkat output berapa sehingga unit bisnis tersebut bisa memetik keuntungan. Dari informasi ini maka mereka akan menyusun perencanaan yang berkaitan dengan hal itu.

Karena perhatian saat ini terfokus pada keuntungan maka perlu didefinisikan terlebih dahulu makna keuntungan dalam konteks ini. Secara intuisi keuntungan didefinisikan sebagai kelebihan pendapatan atas biaya-biaya yang dikeluarkan. Secara aljabar definisi ini bisa diekspresikan sebagai berikut:

$$\Pi = TR - TC \qquad (3.3.42)$$

di mana Π adalah keuntungan, TR ádalah *total revenue* atau pendapatan total dan TC ádalah biaya total. Biaya total (TC) merupakan penjumlahan dari biaya tetap dan biaya variable.

Adapun kondisi impas (*break even*) secara aljabar bisa ditunjukkan pada ekspresi berikut ini:

$$TR - TC = 0 \qquad (3.3.43)$$

Untuk memberikan ilustrasi dalam kasus ini marilah kita hadirkan kembali di sini Contoh 3.3. dan Contoh 3.4.. Dari kedua contoh tersebut carilah titik impas (*break-even point*) nya.

Sebagaimana disebut di muka bahwa titik impas atau (*break-even point*) adalah merupakan titik potong dari biaya total (TC) dan pendapatan total (TR). Untuk keperluan mencari letak dari titik potong ini marilah kita panggil lagi persamaan garis dari pendapatan total (TR) dan biaya total (TC) yang disajikan di bawah ini:

Pendapatan total (TR): $R=2Q$
Biaya Total (TC) : $C=4+0.75Q$

Berdasar pada fungsi TR dan TC di atas dan mengikuti definisi yang diekspresikan dalam persamaan (3.3.43) maka kondisi impas/break-even adalah

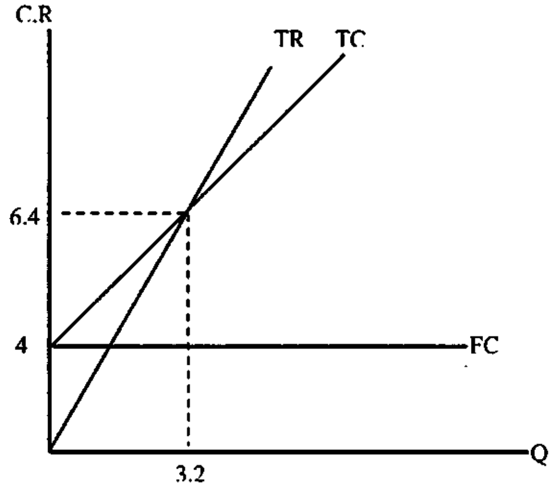
$$2Q-(4+0.75Q)=0$$
$$2Q-4-0.75Q)=0$$
$$1.25Q-4=0$$
$$1.25Q=4$$
$$Q=3.2$$

Selanjutnya mensubstitusikan nilai Q yang telah diperoleh di atas kedalam salah satu persamaan, kita pilih saja persamaan TR, maka akan diperoleh:

$$Y=6.4$$

Dengan demikian posisi titik potong dari kedua garis sudah bisa diidentifikasi yaitu terletak pada koordinat (3.2.6.4). Hal ini menunjukkan bahwa kondisi impas (*break even*) dicapai ketika jumlah unit yang terjual adalah sebesar 3.2 dengan biaya dan pendapatan sebesar 6.4 (ingat bahwa pada posisi ini jumlah biaya dan pendapatan adalah sama).

Adapun representasi geometrik dari analisis titik impas (break-even poin) ini bisa dilihat pada gambar di bawah ini.



gambar 3.24.

3.5. Plotting Fungsi Implisit

Dalam banyak kasus suatu fungsi/persamaan diekspresikan dalam bentuk implisit. Dalam kasus fungsi yang dituliskan secara eksplisit, ruas kiri biasanya menunjukkan besaran tergantung sementara ruas kanannya menunjukkan besaran penentu. Berbeda dengan bentuk eksplisit, bentuk implisit menuliskan besaran-besaran yang ada dalam ruas yang sama. Berbagai contoh yang didiskusikan sebelumnya semuanya adalah mempunyai bentuk eksplisit. Untuk mengetahui lebih lanjut mengenai bentuk implisit ini berikut ini disajikan berbagai contoh fungsi implisit:

$$2Y + 3X - 30 = 0 \quad (3.3.44)$$

$$6Y + 3X = 36 \quad (3.3.45)$$

Memang, bentuk implisit ini bisa diubah dulu menjadi bentuk eksplisit baru selanjutnya digambarkan garisnya. Namun hal ini kadang dipandang sebagai kurang efisien karena harus melakukan operasi dua kali. Penggambaran fungsi implisit bisa dilakukan secara langsung tanpa harus melakukan pembentukan persamaan garis terlebih dahulu. Pendekatan ini bisa dilakukan sepanjang tujuannya tidak untuk melakukan analisis yang melibatkan angka arah (*gradient*) dari garis yang bersangkutan. Berikut ini adalah beberapa ilustrasi mengenai penggambaran garis dari fungsi implisit.

Pada dasarnya penggambaran sebuah garis linear bisa melalui hanya satu titik asalkan diketahui angka arah (*gradient*)nya. Jika tidak tersedia informasi mengenai angka arah tersebut, maka hal ini bisa dilakukan bila ada dua buah titik yang darinya bisa dibuat suatu garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Prinsip menghubungkan dua buah titik inilah yang akan dipakai dalam penggambaran garis yang berasal dari fungsi implisit.

Untuk kepentingan ini perlu dicari dua buah titik, yang berasal dari fungsi implisit tersebut, yang darinya bisa ditarik sebuah garis. Cara mudah untuk menemukan titik-titik tersebut adalah dengan menemukan titik potong dari fungsi implisit tersebut dengan masing-masing sumbu X dan sumbu Y. Teknik untuk menemukan titik potong ini adalah sebagai berikut:

Ketika garis tersebut memotong sumbu X, maka nilai Y sama dengan nol. Sebaliknya jika garis tersebut memotong sumbu Y maka nilai X sama dengan nol. Aksioma inilah yang akan membantu dalam penggambara fungsi implisit. Sebagai contoh marilah kita gambarkan kedua fungsi implisit yang dituliskan pada persamaan (3.3.44) dan (3.3.45) di atas.

Untuk persamaan (3.3.44),
Pada titik potong dengan sumbu Y, nilai X adalah nol, sehingga:

$$2Y - 30 = 0$$
$$Y = 15$$

Di sini bisa diketahui bahwa titik potong dengan sumbu Y terletak pada koordinat (0,15).
Pada titik potong dengan sumbu X, nilai Y adalah nol, sehingga:

$$3X - 30 = 0$$
$$X = 10$$

Di sini bisa diketahui bahwa titik potong dengan sumbu X terletak pada koordinat (10,0).

Untuk persamaan (3.3.45),
Pada titik potong dengan sumbu Y, nilai X adalah nol, sehingga:

$$6Y = 36$$
$$Y = 6$$

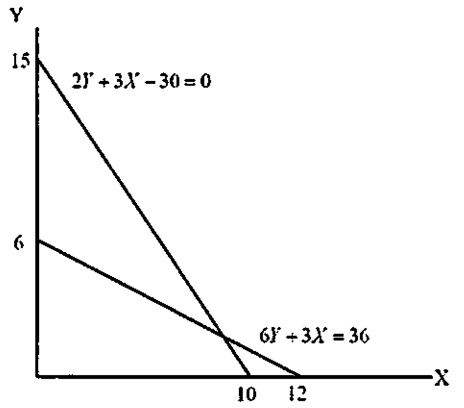
Di sini bisa diketahui bahwa titik potong dengan sumbu Y terletak pada koordinat (0,6)

Pada titik potong dengan sumbu X, nilai Y adalah nol, sehingga:

$$3X = 36$$
$$X = 12$$

Di sini bisa diketahui bahwa titik potong dengan sumbu X terletak pada koordinat (12,6)

Selanjutnya kedua fungsi implisit tersebut bisa digambarkan di bawah ini:



gambar 3.25.

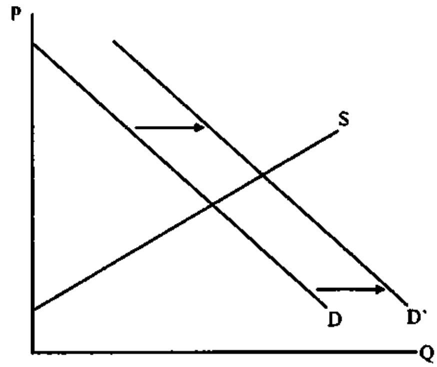
4. PERLUASAN

4.1. Dampak dari Kenaikan Permintaan terhadap Harga

Praktek yang sering ditemui dalam area ekonomi adalah bertambahnya permintaan dalam situasi di mana tidak berubah. Situasi seperti ini terjadi disebabkan oleh beberapa hal yang antara lain adalah: pendapatan konsumen, harga barang yang terkait, perubahan musim, perubahan selera.

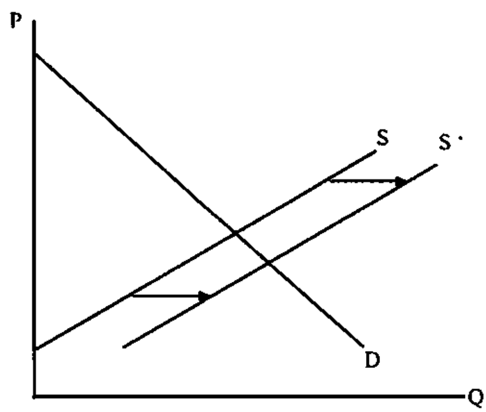
Ketika pendapatan konsumen naik maka konsumen akan mempunyai anggaran yang lebih longgar. Dengan kondisi yang seperti ini maka konsumen akan bisa mengkonsumsi barang-barang dengan jumlah yang lebih tinggi.

Demikian juga ketika harga barang-barang yang terkait berubah. Untuk barang yang bersifat susbstitutif, kenaikan pada harga barang ini akan memberikan efek harga relatif. Sebagai misal adalah hubungan antara konsumsi minyak dengan konsumsi gas. Kedua barang tersebut mempunyai hubungan yang substitutif. Ketika seseorang mengkonsumsi minyak maka baginya gas adalah alternatif atau substitusi terhadap minyak. Barang substitutif mempunyai peran sebagai barang yang akan diperbandingkan dengan barang yang sedang dikonsumsi oleh konsumen. Dalam mengkonsumsi minyak, konsumen akan terus memperbandingkan kedua harga barang tersebut. Jika harga gas lebih menarik dibandingkan dengan harga minyak maka dia akan beralih menggunakan gas yang berarti bahwa permintaan minyak menurun; Demikian juga sebaliknya. Hal seperti ini dalam analisis ekonomi mikro ditunjukkan oleh pergeseran kurva permintaan.



Hal yang sama juga bisa terjadi pada sisi penawaran. Hal seperti ini dalam analisis ekonomi mikro teridentifikasi sebagai disebabkan oleh berbagai sebab antara lain perubahan teknologi, perubahan musim, perubahan harga input, pengenaan pajak.

Keadaan seperti ini digambarkan di atas dalam analisis ekonomi ditunjukkan oleh pergeseran fungsi penawaran sebagai berikut ini:



Sebagai akibat dari pergeseran kurva baik kurva permintaan maupun kurva penawaran maka tingkat harga keseimbangan akan berubah. Perubahan harga inilah yang akan menjadi fokus dari analisis matematika berikut ini.

Contoh 3.

Perusahaan "Milkyway" mempunyai penawaran dan menghadapi permintaan yang digambarkan dalam fungsi berikut ini:

$$S: Q = \frac{1}{2}P + 2$$

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 2I$$

Periksalah:

1. Jika pendapatan konsumen adalah 50 tentukan harga keseimbangan yang terjadi di pasar beserta jumlah barang yang ditransaksikan
2. Jika pendapatan konsumen naik menjadi 60, Tentukan:
   a. Berapakah efek yang ditimbulkan pada jumlah barang yang diminta.
   b. Sejauh manakah harga keseimbangan pasar akan berubah sebagai akibat dari adanya hal tersebut.
3. Tentukan
   a. Kenaikan awal dari kuantitas barang yang diminta (Q) sebagai akibat dari kenaikan pendapatan tersebut
   b. Selidikilah berapa besarnya efek "*stretching-out*", sebagai akibat dari kenaikan harga, terhadap kuantitas (Q) yang dipasok (supply) ke pasar.
   c. Selidiki pulalah berapa besarnya efek "crowding-out", sebagai akibat dari tidak bertambahnya penawaran, terhadap harga (P) dan kuantitas (Q) keseimbangan

Langkah Penyelesaian:

a. Perlu diketahui bahwa fungsi permintaan yang ada di atas mengadung satu terma, yaitu pendapatan (I), yang menjadikan fungsi permintaan di atas hanya bisa digambarkan dalam grafik tiga dimensi. Padahal grafik yang selalu dipakai adalah grafik dua dimensi. Untuk itu, Pertama-tama yang perlu dilakukan di sini adalah mengubah fungsi permintaan menjadi bentuk standard yaitu sesuai dengan asumsi yang selalu dipakai dalam hukum permintaan yaitu *ceteris paribus*. Dengan asumsi ini maka pendapatan (I) dikekang menjadi konstan. Dengan cara ini maka variabel pendapatan (I) berubah menjadi besaran konstan.

Untuk mewujudkan hal tersebut nilai pendapatan yang telah diketahui disubstitusikan ke dalam fungsi permintaan sehingga menjadi bentuk yang standard, yaitu:

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 2(50)$$

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 100$$

Sekarang marilah di kita cari harga keseimbangan dengan cara memotongkan kedua fungsi permintaan dan fungsi penawaran di atas menjadi:

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 100$$

$$S: Q = \frac{1}{2}P + 2$$

---------------------------- (-)

$$0 = -\frac{7}{6}P + 98$$

$$P = 84$$

Dengan nilai P (harga) yang sudah ditemukan di atas, maka bisa ditemukan nilai Q sebesar:

$$Q = 44$$

b. Jika pendapatan (I) berubah menjadi 64 maka fungsi permintaan berubah menjadi:

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 2(64)$$

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 128$$

Dengan fungsi peremintaan yang baru ini maka harga dan kuantitas dalam keseimbangan bisa diperoleh melalui prosedur berikut ini:

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 128$$

$$S: Q = \frac{1}{2}P + 2$$

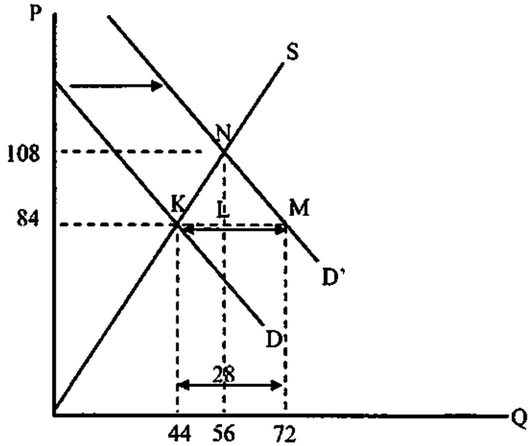
---------------------------- (-)

$$0 = -\frac{7}{6}P + 126$$

$$P = 108$$

Nilai kuantitas yang berkaitan dengan harga tersebut di atas adalah:

$$Q = 56$$



Dari pemaparan grafik di atas terlihat bahwa sebagai akibat dari kenaikan pendapatan dari 50 menjadi 64 maka hal ini berakibat pada kenaikan jumlah (kuantitas) barang dalam keseimbangan naik dari 44 menjadi 56. Begitu juga hal ini mengakibatkan kenaikan harga keseimbangan dari 84 menjadi 108.

a. Sebenarnya kasus tersebut menunjukkan suatu proses yang terjadi secara serentak (simultan). Ketika jumlah barang yang diminta meningkat sebagai akibat dari kenaikan pendapatan maka hal ini akan mendorong harga untuk naik. Ketika harga naik maka hal ini mempunyai dampak ganda: di sisi penawaran hal ini akan mendorong kenaikan penawaran, ditunjukkan oleh pergeseran penawaran dari titik K ke titik L. Sementara di sisi permintaan hal ini akan menekan permintaan ke bawah, ditunjukkan oleh pergeseran permintaan dari titik M ke titik L.

b. Dampak kenaikan pendapatan terhadap kenaikan jumlah barang diminta (Q) pada kondisi mula-mula bisa dilihat dengan membandingkan besarnya Q pada fungsi awal dan Q pada fungsi perubahan. Hal ini bisa dilihat sebagai berikut ini:

$$D': Q = -\frac{2}{3}P + 128$$

$$D: Q = -\frac{2}{3}P + 100 \qquad (-)$$

$$\Delta Q = 28$$

Perubahan awal dari jumlah barang yang diminta (ΔQ) ditunjukkan oleh pergeseran dari titik K ke titik M yang ukurannya adalah 28.

Dari sini selanjutnya bisa dilihat hal-hal berikut ini:

a. Besarnya perubahan jumlah barang yang dipasok ke pasar yaitu sebesar 12 unit. Perubahan ini bisa diidentifikasi sebagai pergerakan dari titik K ke titik L. Hal ini bisa juga dilihat dari cara lain yaitu bahwasanya kenaikan pasokan sebesar 12 unit ini merupakan perkalian antara gradient dari fungsi penawaran yang sebesar ½ dengan kenaikan harga yang ukurannya sebesar 24.
b. Selanjutnya karena jumlah tambahan pasokan ke pasar hanya sebesar 12 unit sementara jumlah total kenaikan permintaan adalah 28 maka selisih yang besarnya 16 unit inilah yang disebut sebagai dampak "crowding-out" atau pergerakan dari titik M ke titik L. Hal ini bisa juga dilihat dari cara lain yaitu bahwasanya penurunan permintaan sebesar 16 unit ini merupakan perkalian antara gradient dari fungsi permintaan yang sebesar 2/3 dengan kenaikan harga yang ukurannya sebesar 24.
c. Dari penyelesaian yang dilakukan pada poin b dan poin c di atas, bisa dibuat suatu model penyelesaian baru sebagai berikut ini:

$$m_D \Delta P + m_S \Delta P = \Delta Q$$
$$\Delta P(m_D + m_S) = \Delta Q \quad \text{...(E.3.1)}$$

di mana $\Delta P, \Delta Q$, berturut-turut, adalah perubahan harga keseimbangan dan perubahan kuantitas awal. Sementara m_D, m_S, berturut-turut, adalah gradient dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran dalam nilai absolut.

Contoh 2.

Suatu negara mempunyai suatu lembaga yang bertugas untuk menstabilkan harga beras. Lembaga ini bekerja dengan cara menyerap pasokan pasar yang berlebih dan memasok pasar jika terdapat kelebihan permintaan yang tidak tercukupi. Selain itu lembaga tersebut juga menentukan range fluktuasi harga pasar yang bisa ditolerir (*tollerable fluctuation range*) dari komoditi tersebut yang berupa batas atas dan batas bawah, yaitu:

$$14 \leqslant P \leqslant 20$$

Dari catatan yang ada pada lembaga tersebut kemudian diformulasikan fungsi penawaran dan fungsi permintaan dari komoditi tersebut, yaitu sebagai berikut:

$$S: Q_S = 10 + 2P$$
$$D: Q_D = 90 - 3P$$

Tingkat harga pasar yang terbentuk sebesar 16 dengan jumlah barang yang ditransaksikan di pasar sebanyak 32.

Dari hasil monitoring bisa diketahui bahwa pada jangka waktu satu tahun lagi akan terjadi lonjakan pasokan pasar, yang disebabkan oleh keberhasilan penerapan teknik produksi baru, sebesar 20. Tentukan:

a. Seberapa besar kenaikan pasokan yang disebut di atas akan berakibat pada penurunan harga pasar
b. Jika lembaga di atas menginginkan harga pasar, paling tidak, berada pada batas bawah berapakah jumlah kelebihan pasokan ke pasar perlu diserap?

Dengan menggunakan

Dengan menggunakan formuasi yang ada pada persamaan (E.3.1.) maka bisa diperoleh :

a. Penurunan harga pasar yaitu:

$$\Delta P = \frac{\Delta Q}{(m_D + m_S)}$$

$$\Delta P = \frac{20}{(3+2)}$$

$$\Delta P = 4$$

Dengan penurunan sebesar 4 di atas maka harga baru yang terbentuk di pasar adalah 12 (16-4) yang berarti bahwa harga pasar yang baru tersebut berada di bawah batas bawah yang bisa ditolerir yaitu 14.

b. Guna mengangkat harga pasar agar bisa mencapai batas bawah maka harga harus diangkat menjadi sebesar 14. Hal ini berarti bahwa penurunan harga pasar, ΔP, dari kondisi sebelumnya maksimum hanya boleh terjadi sebesar 2 (16-14).

   Dengan keterangan ini maka besarnya tambahan Q, ΔQ, maksimum bisa dicari sebagai berikut:

$$\Delta Q = \Delta P(m_D + m_S)$$

$$\Delta Q = 2(2+3)$$

$$\Delta Q = 10$$

Karena jumlah Q maksimum yang diperbolehkan adalah sebesar 10 sementara kenaikan Q yang riil akan terjadi adalah sebesar 20, maka akan tetap terjadi kelebihan penawaran sebesar 10 (20-10). Agar bisa memperoleh harga yang tepat pada batas bawah, 14, maka kelebihan pasokan/penawaran tersebut perlu diserap oleh lembaga.

Contoh 3.

Sebuah negara menunjuk Bank Sentral sebagai otoritas moneter yang salah satu tugasnya adalah mengendalikan kurs mata uang negara tersebut dengan mata uang asing yang ada. Karena sistem moneter internasional adalah sedemikian sehingga negara tersebut menempatkan satu mata uang asing tertentu sebagai mata uang asing utama (*major currency*) sebagai *benchmark* dan kepadanya mata uang negara tersebut dikaitkan. Anggap bahwa mata uang asing tersebut adalah Dollar Amerika.

Dari data yang ada bisa disusun fungsi penawaran dan fungsi permintaan pada Dolar Amerika sebagai berikut ini:

$$D : Q = 8000 + 1.25\ GNP - 1.5\ ER$$

Di mana ER adalah *exchange rate* (kurs) mata uang negara tersebut terhadap dolar yang tidak lain adalah harga dolar dalam denominasi mata uang negara tersebut.

Sebagai catatan, GNP diukur dalam unit ribuan U.S.S. Saat ini GNP negara yang bersangkutan adalah sebesar 800 ribu. Dengan mengasumsikan GNP tersebut konstan pada level ini maka fungsi permintaan terhadap U.S.$ adalah:

$$D : Q = 9000 - 1.5\ ER$$

Adapun fungsi penawaran yang bisa disusun dari data tersebut adalah:

$$S : Q = 900 + 1.2\ ER$$

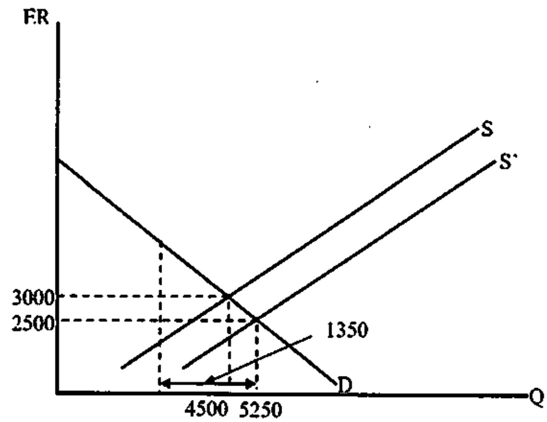
Keseimbangan kurs (ER) bisa diidentifikasi berada pada tingkat 3000 dengan jumlah mata uang dolar yang ditransaksikan (Q) dalam satu periode adalah sebesar $ 4,500.

Informasi lain yang bisa dikumpulkan adalah bahwasanya negara yang bersangkutan mempunyai cadangan devisa yang memadai dan cadangan devisa tersebut diperlakukan sebagai cadangan besi yang berarti bahwa cadangan tersebut tidak boleh dipakai. Selain itu, negara yang bersangkutan juga mempunyai sumber pemasukan bersih devisa (*foreign exchange*) sebesar U.S.$1350 setiap periode.

Jika negara tersebut mempertimbangkan pemberlakuan regim kurs tetap (*fixed exchange rate*) untuk menciptakan kestabilan pertumbuhan ekonomi mereka maka tentukan pada tingkat kurs berapa yang bisa terbentuk secara lestari (*sustain*)?

Langkah Penyelesaian:

Dalam kasus ini pemasukan bersih dari devisa baru pada setiap periode bisa digunakan oleh negara tersebut untuk menambah pasokan devisa ke pasar. Dengan demikian tambahan pemasukan bersih devisa tersebut bisa dianggap sebagai tambahan penawaran. Hal ini bisa digambarkan dalam grafik berikut ini:



4.2. Optimisasi Grafikal

Dalam ilmu manejemen ada cabang yang disebut sebagai majemen operasi. Salah satu topik bahasan dalam area ini adalah riset operasi (*operation research*) yang mendiskusikan tentang usaha untuk memperoleh keuntungan yang maksimum namun terkendala dengan batasan-batasan yang dihadapi oleh unit bisnis yang bersangkutan. Batasan yang sering muncul adalah tenaga kerja yang dipunyai dan peralatan mesin.

Sebagai ilustrasi, lihatlah perusahaan "Jupiter" yang mempunyai pilihan untuk memproduksi dua jenis barang yaitu produk X dan produk Y. Memproduksi produk X akan memberikan kontribusi keuntungan sebesar 50 per unit, sementara jika dia memproduksi produk Y maka akan memperoleh keuntungan sebesar 30 setiap unitnya.

Adapun input yang dipakai dapat digolongkan menjadi tiga kategori yaitu: permesinan (M), tenaga kerja (L) dan tenaga profesional

(P). Tabel berikut ini menunjukkan jumlah penyerapan input untuk masing-masing produk.

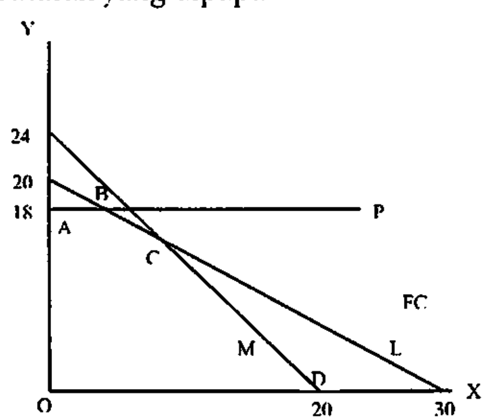
Produk	Penyerapan Input			Sumbangan terhadap Keuntungan
	M	L	P	
X	10	16	-	30
Y	12	10	20	50
Jumlah Input	200	324	360	

Tabel di atas menunjukkan batasan yang dihadapi oleh Jupiter. Hal ini mengingat bahwa jumlah input yang tersedia adalah terbatas, walaupun jumlah dari masing-masing mereka adalah berbeda.

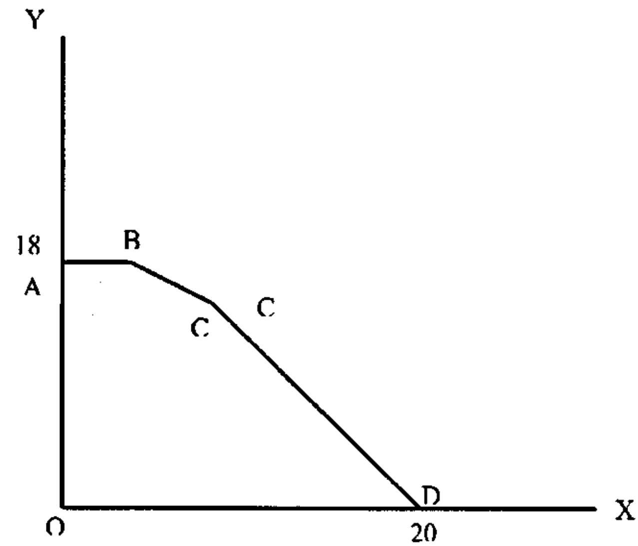
Berdasar pada informasi yang tersaji dalam tabel di atas bisa disusun persamaan batasan dari masing masing input. Dengan membaca secara vertikal dari atas ke bawah pada maing-masing kolom input maka akan bisa diperoleh persamaan dari masing-masing batasan.

Batasan permesinan (M), 10X+12Y = 240
Batasan tenaga kerja (L), 15X+10Y = 300
Batasan profesional (P), 20Y = 360

Seterusnya diperlukan untuk menggambarkan semua garis batasa di atas untuk mengetahui daerah kelayakan. Dengan teknik plotting garis yang sudah didiskusikan di atas, maka berikut ini bisa digambarkan garis-garis batasan yang dipaparkan di atas.



Setelah semua batasan tergambar tugas selanjutnya adalah mengidentifikasi daerah layak (*feasible*). Daerah layak ini merupakan himpunan semua titik-titik yang layak menjadi solusi dari permasalahan tersebut. Solusi atas permasalahan optimasi ini akan diperoleh pada salah satu titik pada daerah layak (*feasible*). Adapun daerah layak yang teridentifikasi dari penggambaran batasan di atas bisa dilihat pada gambar di bawah ini.



Daerah layak yang teridentifikasi adalah daerah yang dibatasi oleh titik-titik OABCD. Semua titik yang berada pada daerah tersebut merupakan calon dari solusi yang dicari. Karena sifat dari kasus yang dihadapi adalah optimasi, maka solusi yang dicari harus bisa memberikan keuntungan yang maksimum. Dari pengamatan awal bisa langsung diketahui bahwa titik-titik yang berada di bawah/ dalam garis-garis hitam atau daerah yang berwarna abu-abu tidak akan mungkin menjadi solusi yang dicari. Hal ini disebabkan karena pada titik-titik tersebut masih belum mengeksplorasi seluruh potensi sumberdaya yang tersedia. Dengan kata lain pada titik-titik tersebut masih terdapat sisa sumberdaya yang belum termanfaatkan. Oleh karenanya bisa dipastikan bahwa titik-titik tersebut bukan titik yang memberikan keuntungan maksimum. Sementara titik-titik yang berada di luar garis-garis hitam merupakan daerah yang berada di luar batas sehingga tidak mungkin bisa dicapai oleh perusahaan. Dengan demikian kandidat dari solusi yang bisa memberikan keuntungan yang maksimum terletak tepat pada garis-garis hitam. Pada garis-garis tersebut semua sumberdaya yang ada sudah tepat sepenuhnya terpakai.

Langkah sekanjutnya adalah mengidentifikasi secara tepat posisi dari titik-titik tersebut. Khusus untuk titik O, A dan D sudah teridentifikasi sebelumnya karena mereka merupakan titik potong dari batasan-batasan yang ada dengan sumbu X dan sumbu Y. Untuk itu perhatian ditujukan sepenuhnya untuk mengetahui posisi dari titik-titik B dan C secara presisi.

Untuk mengetahui posisi dari titik-titik tersebut maka perlu dilihat lagi batasan-batasan mana yang membentuk titik B dan titik C. Titik B merupakan titik potong dari batasan P dan batasan L. Sementara titik C merupakan titik potong antara batasan M dan batasan L. Dengan demikian usaha untuk mengetahui posisi titik-titik tersebut secara tepat maka hal yang perlu dilakukan adalah memotongkan garis-garis yang terlibat.

<u>Titik B</u> (pemotongan garis batasan P dan batasan L) :

Garis batasan L : $15X+10Y = 300 \Rightarrow 30X + 20Y = 600$

Garis batasan P : $20Y = 360 \Rightarrow 20Y = 360$

---------------------------- (-)

$30X = 240,$

$X = 8$, dan $Y = 18$

Jadi titik B sudah bisa diidentifikasi posisinya yaitu terletak pada koordinat (8,18) yang berarti bahwa pada titik ini Jupiter memproduksi X sebanyak 8 unit dan memproduksi Y sebanyak18.

Sekarang marilah kita beralih pada titik C yang mana titik ini merupakan perpotongan garis batasan M dan batasan L.

<u>Titik C</u>:

Garis batasan (M), $10X+12Y = 240 \Rightarrow 150X + 180Y = 3600$

Batasan tenaga kerja (L), $15X+10Y = 300 \Rightarrow 150X + 100Y = 3000$

---------------------------- (-)

$80Y=600$

$Y = 7.5; X = 15$

Dengan demikian posisi titik C sekarang sudah bisa diidentifikasi yaitu berada pada koordinat (15,7.5) yang berarti bahwa pada titik ini Jupiter memproduksi X sebanyak 15 unit dan memproduksi Y sebanyak 7.5 unit.

Selanjutnya berbagai titik yang menjadi kandidat dari solusi yang dicari akan diuji mengenai seberapa besar dia mampu memberikan keuntungan kepada perusahaan. Sebelumnya semua titik yang ada akan disusun dalam tabel berikut ini.

Titik (1)	X			Y			Total Profit (8=4+7)
	Jmlh (2)	KontriBusi (3)	Profit (4=2x3)	Jmlh (5)	KontriBusi (6)	Profit (7=5x6)	
A	0	30	0	18	50	900	900
B	8		240	18		900	1140
C	15		450	7.5		375	825
D	20		600	0		0	600

Kolom profit (keuntungan), kolom (4) untuk X dan kolom (7) untuk Y, merupakan perkalian antara jumlah dan kontribusi. Pada kasus X, kolom 4 merupakan perkalian antara kolom (2) dan kolom (3). Pada kasus Y, kolom 7 merupakan perkalian antara kolom (5) dan kolom (6). Kolom terakhir, yaitu kolom total profit (keuntungan), bisa diperoleh dengan menjumlahkan kolom 4 dengan kolom 7.

Berdasar hasil yang diperoleh pada tabel di atas terlihat bahwa titik B memberikan keuntungan tertinggi bagi perusahaan. Dengan demikian maka perusahaan perlu memproduksi barang X sebanyak 8 unit dan memproduksi barang Y sebanyak 18 unit.

IV

Matriks

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linier yang didiskusikan pada bab satu terdahulu menunjukkan banyaknya aplikasi tidak saja dalam bidang ekonomi melainkan juga dalam bidang-bidang yang lain. Ketika sistem persamaan yang dibentuk oleh persamaan-persamaan linier tidak hanya melibatkan dua atau tiga variabel namun lebih dari itu, mempunyai orde yang lebih tinggi, maka pemecahan sistem persamaan tersebut akan menjadi sangat kompleks jika didekati dengan cara yang sama seperti yang ditempuh pada Bab I. Cara lain yang mampu memberikan kemudahan dalam penyelesaian sistem persamaan ini adalah dengan menggunakan pendekatan matriks.

2. DEFINISI

Vektor adalah kumpulan angka yang disusun berdasar urutan secara mendatar ataupun secara menurun. Susunan yang dibuat secara mendatar atau menurun ini menentukan jenis vektor yang ada. Misalnya susunan angka yang dibuat berurutan secara mendatar disebut sebagai vektor baris. Disebut demikian karena susunan tersebut membentuk suatu baris. Sedangkan susunan angka yang dibuat berurutan secara menurun disebut sebagai vektor kolom karena susunan yang demikian membentuk suatu kolom. Berikut ini adalah contoh-contoh vektor.

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix};\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix};\ c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

Vektor a disebut sebagai vektor baris. Sedangkan vektor **b** dan vektor c disebut sebagai vektor kolom.

Pemahaman atas vektor sebagaimana yang dipaparkan di atas akan sangat membantu memahami makna matriks. Matriks adalah susunan angka-angka yang masing-masing menempati posisi tertentu sehingga secara keseluruhan membentuk segi empat. Berikut ini adalah contoh-contoh dari suatu matriks.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.2.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

2.1. Elemen

Setiap vektor atau matriks terdiri dari elemen-elemen pembentuk vektor atau matriks. Elemen-elemen ini adalah angka-angka yang berada dalam vektor atau matriks yang menduduki posisi/lokasi tertentu. Posisi atau lokasi dari elemen ini ditunjukkan oleh baris dan kolom di mana elemen tersebut berada. Misalnya pada matriks A susunan angka-angka "2 1 9" berada pada baris pertama dari matriks tersebut. Sedangkan susunan angka-angka "7 4 3" dan "5 0 8" masing-masing berada pada baris kedua dan ketiga. Selain dengan cara ini, angka-angka pada matriks A tersebut bisa dilihat dengan cara yang berbeda, misalnya susunan angka-angka "2 7 5" yang tersusun menurun pada matriks tersebut berada pada kolom pertama. Seterusnya susunan angka-angka "1 4 0" merupakan kolom kedua yang membentuk matriks A demikian juga susunan angka-angka "9 3 8" merupakan kolom ketiga.

Dengan cara memandang vektor atau matriks seperti di atas maka seterusnya setiap elemen bisa ditentukan posisinya berdasarkan "koordinat" masing-masing. Misalnya, pada matriks A di atas, angka 2 merupakan elemen dari matriks A yang berada pada posisi baris kesatu dan kolom kesatu. Sedangkan angka 8 pada matriks **B** merupakan elemen yang berada pada baris ketiga dan kolom ketiga. Seterusnya angka 4 pada matriks C merupakan elemen yang berada pada baris kedua dan kolom ketiga.

Berdasar pada identifikasi posisi dari masing-masing elemen dalam matriks seperti dipaparkan di atas maka secara umum matriks bisa dituliskan dengan mengidentifikasi posisi dari masing-masing elemen yang ada sebagaimana berikut ini:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & . & . & ....d_{1n} \\ d_{21} . & d_{22} & d_{23} . & . & . & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} . & . & . & d_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & .. & . \\ . & . & . & . & .. & . \\ d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} . & . & . & d_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Dalam matriks **D** di atas d_{11} adalah elemen yang berada pada posisi baris kesatu dan kolom kesatu; d_{12} merupakan elemen yang berada pada baris kesatu dan kolom kedua; d_{13} merupakan elemen yang berada pada baris kesatu dan kolom ketiga; d_{1n} adalah elemen yang berada pada baris kesatu dan kolom ke-n. Seterusnya d_{2n} adalah elemen yang berada pada baris kedua dan kolom ke-n; d_{3n} adalah elemen yang berada pada baris ketiga dan kolom ke-n; d_{m1} merupakan elemen yang berada pada baris ke-m dan kolom kesatu dan akhirnya d_{mn} adalah elemen yang berada pada baris ke-m dan kolom ke-n.

2.2. Vektor Pembentuk Matriks

Sekarang, pandanglah matriks-matriks A, **B**, dan C di atas. Pada setiap di antaranya bisa dilihat bahwa masing-masing matriks bisa dipandang sebagai kumpulan dari vektor-vektor. Matriks A bisa dipandang sebagai kumpulan dari tiga vektor baris yang masing-masing adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_{1K} &= [2 \quad 1 \quad 5] \\ A_{2K} &= [7 \quad 4 \quad 3] \quad (4.2.6) \\ A_{3K} &= [5 \quad 2 \quad 8] \end{aligned}$$

Vektor A_{1K} merupakan vektor baris yang diambil dari baris kesatu dari matriks A. Vektor A_{2K} dan A_{3K} masing-masing merupakan baris kedua dan baris ketiga yang diambil secara terpisah dari matriks A sehingga dia menjadi vektor baris yang berdiri sendiri. Penulisan yang menggunakan simbol A_{1K} bisa diartikan bahwa vektor tersebut berasal dari matriks A baris kesatu (1) yang terdiri dari beberapa kolom (K). Dengan cara pandang yang sama vektor **B** bisa dipandang sebagai empat vektor baris yang semuanya bisa dilihat pada ekspresi di bawah ini.

$$\begin{aligned} B_{1K} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \\ B_{2K} &= \begin{bmatrix}9 & 4 & 0 & 7\end{bmatrix} \quad (4.2.7) \\ B_{3K} &= \begin{bmatrix}0 & 2 & 8 & 5\end{bmatrix} \\ B_{4K} &= \begin{bmatrix}4 & 0 & 3 & 6\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Begitu juga matriks C juga bisa dipandang sebagai kumpulan vektor-vektor berikut ini.

$$\begin{aligned} C_{1K} &= \begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix} \\ & \qquad\qquad (4.2.8) \\ C_{2K} &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 7\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Selain itu matriks-matriks di atas: **A**, **B** dan **C**, bisa juga dipandang melalui cara pandang yang lain yaitu sebagai kumpulan dari vektor-vektor kolom yang masing-masing adalah sebagai berikut:

$$A_{B1} = \begin{bmatrix}2\\7\\5\end{bmatrix}; \; A_{B2} = \begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}; \; A_{B3} = \begin{bmatrix}5\\3\\8\end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Vektor A_{B1} merupakan vektor kolom yang diambil dari kolom kesatu dari matriks A. Vektor A_{B2} dan A_{B3} masing-masing merupakan kolom kedua dan kolom ketiga yang diambil secara terpisah dari matriks A sehingga dia menjadi vektor kolom yang berdiri sendiri. Penulisan yang menggunakan simbol A_{B1} menunjukkan bahwa vektor tersebut berasal dari matriks A yang terdiri dari beberapa baris (B) dari kolom kesatu (1). Pemaknaan yang sama juga bisa dikenakan pada simbol-simbol yang ada pada vektor-vektor yang lain.

Dengan cara yang sama matriks **B** juga bisa dipandang sebagai kumpulan dari vektor-vektor kolom berikut ini.

$$B_{B1} = \begin{bmatrix}1\\9\\0\\4\end{bmatrix}; \; B_{B2} = \begin{bmatrix}0\\4\\2\\0\end{bmatrix}; \quad B_{B3} = \begin{bmatrix}0\\0\\8\\3\end{bmatrix}; \quad B_{B4} = \begin{bmatrix}3\\7\\5\\6\end{bmatrix} \qquad (4.2.10)$$

Selanjutnya matriks C dalam (4.2.4) di atas juga bisa dipandang sebagai kumpulan dari vektor-vektor kolom seperti di bawah ini:

$$C_{B1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_{B3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad C_{B4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (4.2.11)$$

2.3. Matriks Empat-persegi-panjang, Matriks Bujur Sangkar dan Vektor *iota*

Dalam bagian di atas telah disebutkan bahwa matriks A terdiri dari elemen-elemen pembentuk yang masing-masing menduduki posisi tertentu. Susunan dari elemen ini pada akhirnya secara keseluruhan membentuk "konstelasi" tertentu. Sebagai ilustrasi, bandingkanlah matriks A dan matriks C di atas. Pada keduanya "konstelasi" yang dibentuk oleh elemen-elemen yang ada berbeda pada keduanya. Pada matriks A susunan angka-angka yang terbentuk membentuk baris dan kolom sebanyak 3 (tiga). Sementara pada matriks **B** susunan dari angka-angka yang ada membentuk 4 (empat) baris dan 3 (tiga) kolom. Sedangkan pada matriks C susunan angka-angka yang terbentuk menghasilkan dua baris dan tiga kolom.

Susunan matriks seperti matriks **B** dan matriks C di atas disebut sebagai bentuk empat-persegi-panjang karena jumlah baris dan kolom yang dipunyai tidak sama. Sementara bentuk yang ada pada matriks A disebut sebagai bentuk bujur sangkar karena jumlah baris dan kolom yang dipunyai adalah sama.

Matriks bujur sangkar ini mempunyai sifat yang kahs. Kekhasan yang dipunyai ini terletak pada adanya elemen diagonal yang tidak ada pada bentuk lain. Diagonal dari matriks bujur sangkar ini adalah elemen-elemen yang menduduki suatu "koordinat" di mana baris dan kolomnya adalah sama. Diagonal ini bisa juga dipandang sebagai suatu garis imajiner yang "membelah" secara miring matriks yang bersangkutan menjadi dua bagian yang berbentuk segitiga sama dan sebangun. Sebagai ilustrasi, lihatlah kembali matriks A. Elemen a_{11}, yang berada pada baris kesatu dan kolom kesatu (dalam hal ini adalah 2), elemen a_{22} yang berada pada baris kedua dan kolom kedua (dalam hal ini adalah 4) dan elemen a_{33} yang berada pada baris ketiga dan kolom ketiga (dalam hal ini adalah 8) merupakan elemen diagonal. Lihatlah bagian kanan keatas dan bagian kiri kebawah dari diagonal tersebut. Kedua bagian/belahan tersebut membentuk segitiga yang tepat sama diantara keduanya.

3. Orde atau Dimensi dari Matriks, Vektor dan Skalar

Sebagaimana yang dikenal pada sistem persamaan linier, matriks juga mempunyai orde atau dimensi. Orde atau dimensi dari suatu matriks dibentuk dari berapa banyak baris dan kolom yang menyusun suatu matriks. Matriks A di atas menunjukkan bentuk bujur sangkar yang mempunyai orde atau dimensi dua kali dua. Matriks B mempunyai orde atau dimensi tiga kali tiga karena terdiri dari tiga baris dan tiga kolom. Adapun matriks C mempunyai orde atau dimensi dua kali tiga karena terdiri dari dua baris dan dua kolom.

Berpegang pada ketentuan tersebut maka suatu matriks mempunyai dimensi $m \times n$ jika matriks tersebut terdiri dari m baris dan n kolom. Suatu vektor baris mempunyai dimensi $1 \times n$, sedangkan vektor kolom mempunyai dimensi $m \times 1$ adapun skalar mempunyai dimensi 1×1. Pemahaman atas dimensi dari vektor dan matriks ini akan sangat membantu dalam mengidentifikasi hasil dari perkalian vektor dan matriks di bawah ini.

Seringkali dalam suatu pembahasan menampilkan suatu vektor atau matriks tidak dengan tujuan untuk melakukan operasi terhadapnya melainkan hanya untuk melakukan analisis dan diskusi atas vektor dan matriks tersebut. Untuk kepentingan seperti ini akan menjadi percuma dan menjadi tidak praktis jika menampilkan keseluruhan bodi dari vektor atau matriks tersebut. Dalam kasus seperti ini vektor atau matriks yang bersangkutan hanya ditampilkan dalam bentuk simbol. Karena hanya dalam bentuk simbol maka penulisannya tetap harus memudahkan siapapun yang membaca untuk mengetahui matriks tersebut. Hal yang mendasar adalah mengenai simbol dari dimensi vektor atau matriks tersebut. Berikut ini adalah contoh-contoh mengenai bagaimana menyimbolkan vektor atau matriks.

$$A_{(m \times n)}; B_{(i \times j)}; C_{(1 \times j)}; D_{(m \times 1)} \quad (4.3.1)$$

Pada penyimbolan vektor atau matriks yang digambarkan pada ekspresi (4.3.1) di atas, bilangan yang ada dalam kurung dan dituliskan sebagai *subscript* menunjukkan dimensi dari vektor atau matriks yang bersangkutan. Matriks A di atas mempunyai dimensi $m \times n$, sedangkan matriks B mempunyai dimensi $i \times j$. Vektor C merupakan vektor baris dengan jumlah kolom sebanyak j, adapun D merupakan vektor kolom dengan jumlah baris sebanyak m. Simbol-simbol dimensi yang digunakan di muka yaitu m, n, i, j $\neq$ 0.

Sebagai catatan di sini adalah bahwa ada penyimpangan dalam penulisan skalar. Meskipun skalar mempunyai dimensi, yaitu 1×1, namun dimensi tersebut tidak perlu disertakan dalam penulisannya sebagaimana yang terjadi dalam kasus vektor dan matriks. Tatacara penulisan skalar yang standar adalah cukup dengan menyebutkan bahwa dia adalah skalar.

4. OPERASI VEKTOR DAN MATRIKS

Sebagaimana bilangan, vektor dan matriks juga bisa dilakukan operasi atasnya. Vektor ataupun matriks bisa ditambahkan/dikurangkan dengan/dari vektor ataupun matriks lainnya jika syarat-syaratnya terpenuhi. Demikian juga vektor ataupun matriks bisa dikalikan dengan vektor atau matriks lainnya jika syarat-syarat untuk itu terpenuhi. Namun, tidak ada operasi pembagian terhadap suatu matriks oleh matriks yang lain. Berikut ini disajikan berbagai operasi yang dimaksudkan.

4.1. Transpose

Suatu transpose dari suatu vektor atau matriks adalah vektor atau matriks baru di mana kolom-kolom yang ada berasal dari baris-baris dari matriks aslinya. Hal ini juga bisa dipandang dengan cara lain yang "terbalik" namun tidak mengubah makna yaitu bahwasanya suatu transpose dari suatu vektor atau matriks adalah vektor atau matriks baru di mana baris-baris yang ada berasal dari kolom-kolom dari matriks aslinya.

Setiap elemen yang berada pada kolom ke j dari transpose tersebut berasal dari elemen yang ada dalam baris ke j dari matriks aslinya. Sebaliknya hal ini juga bisa dikatakan bahwa setiap elemen yang berada pada baris ke j dari transpose tersebut berasal dari elemen yang ada dalam kolom ke j dari matriks aslinya.

Transpose dari suatu matriks disimbolkan dengan memberikan tanda " ' " pada simbol vektor atau matriks aslinya. Cara lain yang biasa dipakai untuk tujuan ini adalah dengan menambahkan huruf "T" di belakang simbol vektor atau matriks aslinya yang dituliskan sebagai superscript.

Sebagai ilustrasi dari hal ini bisa dilihat pada contoh-contoh berikut ini yang mengambil dari vektor atau matriks dari (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) dan (4.2.4)di atas.

$$a^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; b^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}; c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (4.4.1)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Vektor-vektor a^T, b^T dan c^T terlihat bahwa bentuk mereka berubah total dari vektor aslinya. Vektor a yang tadinya merupakan vektor baris berubah menjadi vektor kolom dalam transpose-nya. Demikian juga vektor **b** dan c yang merupakan vektor kolom berubah menjadi vektor baris pada transposenya.

Sekarang bandingkanlah matriks A^T dengan matriks A. Terlihat bahwa elemen-elemen yang ada pada kolom-kolom pada A^T tepat sama dengan elemen-elemen yang ada pada baris baris pada matriks A. Secara spesifik bisa dilihat bahwa elemen-elemen pada kolom 1, 2 dan 3 pada matriks A^T tepat sama dengan elemen-elemen pada baris 1, 2 dan 3 pada matriks A. Hal yang sama juga bisa dilihat bahwa elemen-elemen pada baris 1, 2 dan 3 pada matriks A^T ternyata tepat sama dengan elemen-elemen pada kolom 1, 2 dan 3 pada matriks A. Pembaca dipersilahkan untuk memeriksa sendiri hal yang sama pada matriks-matriks B^T dan C^T.

4.2. Operasi Penambahan

Operasi penambahan atau pengurangan suatu vektor atau matriks oleh vektor atau matriks lainnya bisa dilakukan hanya apabila kedua vektor atau kedua matriks yang bersangkutan mempunyai dimensi yang sama. Pada sub seksi berikut disampaikan tatacara operasi penambahan atau pengurangan.

Tata Cara Operasi

a. **Kenali Dimensi Kedua Vektor atau Matriks**

Sebagaimana disebutkan di muka bahwa dua vektor atau matriks bisa dilakukan operasi penambahan atau pengurangan hanya jika keduanya mempunyai dimensi yang sama. Untuk itu sebelum melakukan operasi penambahan atau pengurangan ini maka perlu terlebih dahulu diperiksa dimensi dari kedua vektor atau matriks yang akan dioperasikan apakah keduanya mempunyai dimensi yang sama atau tidak.

b. **Beri Nama-nama Vektor atau Matriks yang akan Dioperasikan**

Peberian nama ini kelihatannya sepele namun akan sangat membantu dalam melokalisir elemen-elemen dari matriks hasil operasi

c. **Berikan Juga Nama pada Vektor yang akan Menjadi Hasil Operasi dan Identifikasikan elemen-elemen yang ada**

Demikian juga pemberian nama atas vektor atau matriks hasil operasi di sini akan sangat memudahkan untuk mengetahui elemen-elemen dari vektor atau matriks tersebut. Dari elemen-elemen ini kemudian bisa diidentifikasi bagaimana cara memperoleh elemen-elemen yang dimaksudkan.

d. **Lakukan Operasi**

Melakukan operasi di sini adalah dengan membentuk matriks baru di mana elemen-elemen yang ada sebagaimana disebutkan pada poin c di atas dibentuk dengan cara menjumlahkan elemen-elemen yang ada pada matriks yang satu dengan elemen pasangannya pada matriks yang lain. Bentuk umum mengenai hal ini adalah :

$$c_{mn} = a_{mn} + b_{mn} \quad (4.4.5)$$

Pada (4.4.5) di atas, c_{mn} adalah elemen pada matriks baru yang berada pada baris ke-m dan kolom ke-n. Sedangakan a_{mn} adalah elemen pada matriks pertama yang berada pada baris ke-m dan kolom ke-n, sementara b_{mn} adalah elemen pada matriks kedua yang berada pada baris ke-m dan kolom ke-n.

Contoh 4.1.

Anggap ada dua buah matriks: matriks **A** dan matriks **B** berikut ini.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Temukan penjumlahan dari matriks **A** dan **B** di atas

Penyelesaian:

a. Baik matriks **A** dan **B** di atas mempunyai dimensi 2×2 sehingga operasi penambahan atau penjumlahan bisa dilakukan terhadap keduanya

b. Kedua matriks sudah diberi nama sehingga tidak perlu lagi untuk memberikan nama pada keduanya

c. Anggap bahwa matriks hasil penjumlahan ini bernama matriks **C** dengan dimensi 2×2. Adapun elemenn-elemen dari matriks **C** ini adalah:

$$C_{(2x2)} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{13} & c_{14} \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

d. Operasi selanjutnya adalah menemukan masing-masing elemen yang ada dalam matriks **C**, yaitu:

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} \qquad c_{12} = a_{12} + b_{12}$$
$$c_{11} = 2 + 0 \qquad c_{12} = 1 + 4$$
$$c_{11} = 2 \qquad c_{12} = 5$$
$$c_{11} = a_{11} + b_{11} \qquad c_{12} = a_{12} + b_{12}$$
$$c_{11} = 2 + 0 \qquad c_{12} = 1 + 4$$
$$c_{11} = 2 \qquad c_{12} = 5$$

Sehingga matriks hasil penjumlahan antara matriks **A** dan matriks **B** adalah

$$C_{(2x2)} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.2.

Kurangkanlah matriks **E** dari matriks **D** berikut ini:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk melakukan penyelesaian diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Baik matriks **D** dan **E** di atas mempunyai dimensi 4×4 sehingga operasi pengurangan bisa dilakukan terhadap keduanya

b. Kedua matriks sudah diberi nama sehingga tidak perlu lagi untuk memberikan nama pada keduanya

c. Anggap bahwa matriks hasil penjumlahan ini bernama matriks **F** dengan dimensi 4×4. Adapun elemenn-elemen dari matriks **F** ini adalah:

$$\mathbf{F}_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

d. Operasi selanjutnya adalah menemukan masing-masing elemen yang ada dalam matriks **F**, yaitu:

$$\begin{array}{llll} f_{11} = d_{11} - e_{11} & f_{12} = d_{12} - e_{12} & f_{13} = d_{13} - e_{13} & f_{14} = d_{14} - e_{14} \\ f_{11} = 0 - 6 & ; f_{12} = 3 - 1 & ; f_{13} = 1 - 0 & ; f_{14} = 9 - 7 \\ f_{11} = -6 & f_{12} = 2 & f_{13} = 1 & f_{14} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f_{21} = d_{21} - e_{21} & f_{22} = d_{22} - e_{22} & f_{23} = d_{23} - e_{23} & f_{24} = d_{24} - e_{24} \\ f_{21} = 1 - 3 & ; f_{22} = 1 - 1 & ; f_{23} = 0 - 8 & ; f_{24} = 4 - 2 \\ f_{21} = -2 & f_{22} = 0 & f_{23} = -8 & f_{24} = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f_{31} = d_{31} - e_{31} & f_{32} = d_{32} - e_{32} & f_{33} = d_{33} - e_{33} & f_{34} = d_{34} - e_{34} \\ f_{31} = 2 - 0 & ; f_{32} = 8 - 7 & ; f_{33} = 3 - 1 & ; f_{34} = 5 - 0 \\ f_{31} = 2 & f_{32} = 1 & f_{33} = 2 & f_{34} = 5 \end{array}$$

$$f_{41} = d_{41} - e_{41} \quad ; \quad f_{42} = d_{42} - e_{42} \quad ; \quad f_{43} = d_{43} - e_{43} \quad ; \quad f_{44} = d_{44} - e_{44}$$
$$f_{41} = 7 - 3 \quad ; \quad f_{42} = 0 - 5 \quad ; \quad f_{43} = 2 - 1 \quad ; \quad f_{44} = 6 - 8$$
$$f_{41} = 4 \quad f_{42} = -5 \quad f_{43} = 1 \quad f_{44} = -2$$

Sehingga,

$$\mathbf{F}_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.3. Operasi Perkalian

Vektor atau matriks juga mempunyai sifat seperti bilangan. Mereka juga bisa dikalikan satu sama lain hanya saja tidak seperti bilangan yang bebas dikalikan satu sama lain dengan bilangan apapun tanpa syarat. Vektor atau matriks mensyaratkan syarat-syarat tertentu agar bisa dikalikan satu sama lain yang mana hal ini akan disampaikan pada bagian di bawah ini nantinya. Adapun tata cara perkaliannyapun sangat khas dan cukup kompleks yang membutuhkan ketelitian dan kecermatan dalam melakukannya.

4.3.1. Tata Cara Operasi

a. Kenali Dimensi Kedua Vektor atau Matriks

Sebagaimana disebutkan di atas bahwa dua vektor atau matriks bisa dilakukan operasi perkalian dengan syarat tertentu. Vektor atau matriks bisa dikalikan dengan vektor atau matriks lainnya asalkan ada kecocokan antara dimensi dari vektor atau matriks yang dikalikan dengan vektor atau matriks yang berperan sebagai pengalinya. Secara lebih spesifik kecocokan dimensi ini bisa ditemui jika jumlah kolom dari vektor atau matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari vektor atau matriks pengali. Untuk memperjelas konsep tersebut periksalah beberapa vektor dan matriks berikut ini:

$$P_{(2\times3)} ; Q_{(3\times2)} ; \quad _{(3\times1)} ; S_{(1\times3)}$$

Berdasar pada ketentuan yang merupakan syarat dari perkalian, maka vektor atau matriks-matriks berikut ini adalah vektor atau matriks yang bisa dan yang tidak bisa dikalikan satu sama lainnya.

Tabel 4.1.

No	Bisa Dikalikan	Tidak Bisa Dikalikan
1	$P_{(2\times3)} \times Q_{(3\times2)}$	$S_{(1\times3)} \times P_{(2\times3)}$
2	$Q_{(3\times2)} \times P_{(2\times3)}$	$R_{(3\times1)} \times P_{(2\times3)}$
3	$P_{(2\times3)} \times R_{(3\times1)}$	$Q_{(3\times2)} \times S_{(1\times3)}$
4	$R_{(3\times1)} \times S_{(1\times3)}$	$P_{(2\times3)} \times S_{(1\times3)}$
5	$S_{(1\times3)} \times R_{(3\times1)}$	
6	$S_{(1\times3)} \times Q_{(3\times2)}$	

Bisa dilihat pada nomor 1 tabel di atas jumlah kolom matriks P sama dengan jumlah baris matriks Q yaitu 3. Hal ini juga bisa dilihat pada nomor 2 di mana jumlah kolom pada matriks Q sama dengan jumlah baris yang ada pada matriks P yaitu 2. Hal ini juga terjadi pada kasus-kasus lainnya pada kolom yang sama. Pembaca dipersilahkan untuk memeriksa kasus-kasus sisanya.

Pada nomor 3 kolom kedua tabel di atas terlihat bahwa jumlah kolom pada matriks Q, yakni 2, tidak sama dengan jumlah baris yang ada pada matriks S, yakni 1. Karena itu matriks Q tidak bisa dikalikan dengan matriks S. Demikian juga kasus-kasus yang lain pada kolom yang sama semuanya tidak bisa dikalikan satu dengan lainnya.

Sekarang, untuk memudahkan identifikasi atas dua buah matriks yang bisa dikalikan satu sama lain dalam tabel berikut ini akan dituliskan dimensi dari matriks-matriks yang bisa dikalikan satu dengan lainnya.

Tabel 4.2.

No	Kecocokan Dimensi
1	(2 x 3) x (3 x 2)
2	(3 x 2) x (2 x 3)

3	(2 x 3) x (3 x 1)
4	(3 x 1) x (1 x 3)
5	(1 x 3) x (3 x 1)
6	(1 x 3) x (3 x 2)

b. Identifikasikan Dimensi dari Vektor atau Matriks Hasil Perkalian

Identifikasi ini diperlukan karena dengan identifikasi ini akan bisa ditemukan elemen-elemen yang ada pada matriks hasil kali tersebut. Untuk melakukan identifikasi ini perlu melihat dimensi dari kedua matriks yang akan dikalikan. Untuk memperoleh cara yang praktis lihatlah kembali dimensi-dimensi dari matriks-matriks yang dikalikan pada tabel 4.2. Dimensi dari matriks hasil kali bisa diperoleh dengan cara menghilangkan angka-angka yang yang mempunyai latar belakang abu-abu pada tabel 4.2. di atas. Adapun hasil lengkap dari identifikasi ini bisa dilihat pada tabel berikut ini.

Tabel 4.3.

No	Dimensi Matriks-matriks yang Dikalikan	Dimensi Matriks Hasil Kali
1	(2 x 3) x (3 x 2)	(2 x 2)
2	(3 x 2) x (2 x 3)	(3 x 3)
3	(2 x 3) x (3 x 1)	(2 x 1)
4	(3 x 1) x (1 x 3)	(3 x 3)
5	(1 x 3) x (3 x 1)	(1 x 1)
6	(1 x 3) x (3 x 2)	(1 x 2)

Informasi yang ada dalam tabel 4.3. di atas sebagiannya berasal dari tabel 4.2. sebelumnya. Informasi yang ada pada kolom 2 tabel 4.3. berasal dari kolom 2 tabel 4.2.. Sedangkan nilai-nilai yang dipaparkan pada kolom 3 tabel 4.3. diperoleh dengan cara menghilangkan angka-angka yang mempunyai latar belakang abu-abu pada masing-masing baris (nomor). Sebagai titian ingatan bagi para pemula, dimensi matriks hasil kali ini juga bisa diingat-ingat sebagai mengambil angka yang ada pada ujung paling depan dan angka yang ada pada ujung paling belakang.

c. **Menggelar Struktur Matriks Hasil Kali**

Setelah dimensi dari matriks hasil kali bisa diidentifikasi maka perlu untuk menggelar matriks hasil kali tersebut. Sebagai ilustrasi ambillah contoh nomor 1 pada tabel 4.3. di atas di mana diketahui bahwa matriks hasil kali mempunyai dimensi 2 x 2. Anggap bahwa matriks hasil kali tersebut diberi nama matriks P, sehingga:

$$T_{(2x2)} = \begin{bmatrix} T_1 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

d. **Menemukan Nilai-nilai dari Masing-masing Elemen**

Nilai-nilai dari masing-masing elemen-elemen di atas bisa dicari melalui cara mengalikan baris ke "i" dari matriks yang berada di depan dengan kolom ke "j" dari matriks yang berada di belakang. Dalam bentuk umum hal ini bisa ditunjukkan sebagai ekspresi berikut ini:

$$T_{ij} = \sum P(Baris\ ke-i) * Q(kolom\ ke-j) \quad (4.4.9)$$

Di mana P adalah matriks yang berada di depan dan Q adalah matriks yang berada di belakang.

4.3.2. Perkalian Antar Matriks

Dalam pembahasan berikut ini akan diberikan ilustrasi mengenai perkalian antar matriks.

Contoh 4.3.

Kalikanlah matriks $P_{(2x3)}$ dan matriks $Q_{(3x2)}$ berikut ini,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena matriks hasil kali sudah diketahui nama dan dimensinya, yakni matriks T yang ada pada (4.4.8), maka elemen-elemen dari matriks T bisa diperoleh melalui:

$$T_{11} = \sum P(\text{Baris } 1) * Q(\text{Kolom } 1)$$

Tanda $\sum$ menunjukkan penjumlahan dari perkalian yang ada. Untuk memperjelas mengenai hal ini, berikut ini dipaparkan lebih detail mengenai perkalian tersebut melalui tabel berikut ini.

Tabel 4.5 .Mencari T_{11}

P (Baris 1) Ditulis dalam Transpose (1)	**Q (kolom ke 1) (2)**	**Hasil (1) x (2)**
1	3	3
4	0	0
0	2	0
Jumlah		**T_{11} = 3**

Kolom hasil diperoleh dengan cara mengalikan kolom (1) dan kolom (2) pada tabel di atas.

Dengan cara yang sama elemen-elemen yang lain dari matriks T bisa dicari. Berikut ini adalah proses dari pencarian elemen-elemen matriks T.

$$T_{12} = \sum P(\text{Baris } 1) * (\text{Kolom } 2)$$

Table 4.6. Mencari T_{12}

P (Baris 1) Ditulis dalam Transpose (1)	**Q (kolom ke 2) (2)**	**Hasil (1) x (2)**
1	5	5
4	7	28
0	6	0
Jumlah		**T_{12} =33**

$$T_{21} = \sum P(\text{Baris } 2) * Q(\text{Kolom } 1)$$

Tabel 4.7. Mencari T_{21}

P (Baris 2) Ditulis dalam Transpose (1)	**Q (kolom ke 1) (2)**	**Hasil (1) x (2)**
3	3	9
0	0	0
5	2	10
Jumlah		**T_{21} =19**

$$T_{22} = \sum P(\text{Baris } 2) * Q(\text{Kolom } 2)$$

Tabel 4.8. Mencari T_{22}

P (Baris 2) Ditulis dalam Transpose (1)	Q (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
3	5	15
0	7	0
5	6	30
Jumlah		T_{22} =45

Setelah semua elemen dari matriks T diperoleh maka selanjutnya elemen-elemen ini dimasukkan ke dalam matriks T dalam (4.4.8), sehingga diperolehlah matriks hasil kali antara $P_{(2x3)}$ dan $Q_{(3x2)}$, yaitu:

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 33 \\ 19 & 45 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.4.

Lihatlah kedua matriks di bawah ini. Temukan matriks hasil kali antara keduanya.

Penyelesaian:

$$R = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R.S = T = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Prosedur Operasi

a. Pemeriksaan Kecocokan Dimensi

Karena matriks **R** mempunyai dimensi (3 x 2) dan matriks S mempunyai dimensi (2 x 2) maka kedua matriks mempunyai kecocokan dimensi yang merupakan syarat bagi dimungkinkannya perkalian antara **R** x S.

b. Identifikasi Dimensi dari Matriks Hasil Kali

Selanjutnya karena matriks **R** mempunyai dimensi (3 x 2) dan matriks S mempunyai dimensi (2 x 2) maka matriks Hasil kali T akan mempunyai dimensi (3 x 2).

c. Menentukan Struktur Elemen Matriks Hasil Kali

Matrik hasil kali T akan mempunyai elemen-elemen seperti terpapar berikut ini:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{bmatrix}$$

d. Menentukan Nilai dari Elemen-elemen Matriks Hasil Kali

Untuk menentukan nilai-nilai dari setiap elemen yang ada maka perlu diikuti prosedur seperti yang sudah dipaparkan di muka.

$$T_{11} = \sum R(Baris\,1) * S(Kolom\,1)$$

Tabel 4.9. Mencari T_{11}

R (Baris 1) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
7	9	63
3	2	6
Jumlah		T_{11} =69

$$T_{12} = \sum R(Baris\,1) * S(Kolom\,2)$$

Tabel 4.10. Mencari T_{12}

R (Baris 1) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
7	4	28
3	6	18
Jumlah		T_{12} =46

$$T_{21} = \sum R(Baris\,2) * S(Kolom\,1)$$

Tabel 4.11. Mencari T_{21}

R (Baris 2) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
2	9	18
8	2	16
Jumlah		T_{21} =34

$$T_{22} = \sum R(Baris\,2) * S(Kolom\,2)$$

Tabel 4.12. Mencari T_{22}

R (Baris 2) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
2	4	8
8	6	48
Jumlah		T_{22} =56

$$T_{31} = \sum R(Baris\,3) * S(Kolom\,1)$$

Tabel 4.13. Mencari T_{31}

R (Baris 3) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
4	9	36
1	2	2
Jumlah		T_{31} =38

$$T_{32} = \sum R(Baris\,3) * S(Kolom\,2)$$

Tabel 4.14. Mencari T_{32}

R (Baris 3) Ditulis dalam Transpose (1)	S (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
4	4	16
1	6	6
Jumlah		T_{32} =22

Setelah memperoleh seluruh nilai dari setiap elemen yang ada maka nilai-nilai yang telah ditemukan ini dimasukkan ke dalam matriks hasil kali, menjadi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 69 & 46 \\ 34 & 56 \\ 38 & 22 \end{bmatrix}$$

4.3.3. Perkalian Antar Vektor

Mengingat vektor adalah merupakan bentuk khusus dari matriks maka vektor juga bisa dioperasikan sebagaimana suatu matriks. Adapun prosedur yang perlu ditempuh juga sama dengan prosedur perkalian yang ada dalam perkalian antar matriks.

Contoh 4.5.

Carilah hasil kali dari kedua vektor tersebut.

$$R = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

a. Anggap matriks hasil kali antara keduanya adalah matriks U

b. Vektor R mempunyai dimensi $R_{(3\times1)}$ dan vektor S mempunyai dimensi $S_{(1\times3)}$. Dengan demikian dimensi dari matriks hasil kali antara keduanya, U, adalah 3 x 3 (ingat, ambil angka yang berada paling ujung depan dan angka yang berada pada paling ujung belakang)

c. Struktur dari Matriks hasil kali adalah

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}$$

d. Mencari elemen-elemen U

$$U_{11} = \sum R(\text{Baris } 1) * Q(\text{Kolom } 1)$$

Tabel 4.15. Mencari U_{11}

R (Baris ke 1) (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
7	5	35
Jumlah		$U_{11} = 35$

Tabel 4.16. Mencari U_{12}

R (Baris ke 1) (1)	S (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
7	0	0
Jumlah		$U_{12} = 0$

Tabel 4.17. Mencari U_{13}

R (Baris ke 1) (1)	S (kolom ke 3) (2)	Hasil (1) x (2)
7	9	63
Jumlah		$U_{13} = 63$

Tabel 4.18. Mencari U_{21}

R (Baris ke 2) (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
3	5	15
Jumlah		$U_{21} = 15$

Tabel 4.19. Mencari U_{22}

R (Baris ke 2) (1)	S (kolom ke 2) (2)	Hasil (1) x (2)
3	0	0
Jumlah		$U_{22} = 0$

Tabel 4.20. Mencari U_{23}

R (Baris ke 2) (1)	S (kolom ke 3) (2)	Hasil (1) x (2)
3	9	27
Jumlah		$U_{23} = 27$

Tabel 4.21. Mencari U_{31}

R (Baris ke 3) (1)	S (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
11	5	55
Jumlah		$U_{31} = 55$

Tabel 4.22. Mencari U_{32}

R (Baris ke 3) (1)	S (kolom ke-2) (2)	Hasil (1) x (2)
11	0	0
Jumlah		$U_{32} = 0$

Tabel 4.23. Mencari U_{33}

R (Baris ke 3) (1)	S (kolom ke 3) (2)	Hasil (1) x (2)
11	9	99
Jumlah		$U_{33} = 99$

Selanjutnya memasukkan semua elemen yang telah diperoleh ke dalam matriks U, sehingga:

$$U = \begin{bmatrix} 35 & 0 & 63 \\ 15 & 0 & 27 \\ 55 & 0 & 99 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.6.

Carilah hasil kali dari kedua vektor di atas namun dengan cara yang dibalik, yaitu S x R.

Penyelesaian:

Prosedur Operasi

a. **Pemeriksaan Kecocokan Dimensi**

Karena matriks S mempunyai dimensi (1 x 3) dan matriks R mempunyai dimensi (3 x 1) maka kedua matriks mempunyai kecocokan dimensi yang merupakan syarat bagi dimungkinkannya perkalian antara S x R.

b. **Identifikasi Dimensi dari Matriks Hasil Kali**

Selanjutnya karena matriks S mempunyai dimensi (1 x 3) dan matriks R mempunyai dimensi (3 x 1) maka matriks Hasil kali T akan mempunyai dimensi (1 x 1) yang berarti sebuah skalar

c. **Menentukan Struktur Elemen Matriks Hasil Kali**

Matrik hasil kali T akan mempunyai elemen seperti berikut ini:

$$T = [T_1]$$

d. **Menentukan Nilai dari Elemen-elemen Matriks Hasil Kali**

$$T_{11} = \sum S(Baris\,1) * R(Kolom\,1)$$

Tabel 4.24. Mencari T_{11}

S (Baris 1) Ditulis dalam Transpose (1)	R (kolom ke 1) (2)	Hasil (1) x (2)
5	7	63
0	3	6
9	11	99
Jumlah		T_{11} =168

$$T = [168]$$

4.3.4. Perkalian Skalar

Skalar adalah merupakan bentuk khusus dari suatu matriks yaitu matrik yang mempunyai dimensi (1 x 1). Sebagaimana matriks dan vektor yang bisa dikalikan antar sesamanya atau antara vektor dan matriks maka skalar inipun bisa dikalikan dengan sesamanya maupun dengan vektor atau matriks.

Namun begitu ada pengecualian yang menyangkut dimensi dari matriks atau vektor yang akan dikalikan dengan skalar. Jika dalam perkalian matriks atau vektor syarat yang harus dipenuhi adalah kecocokan dimensi dari vektor atau matriks yang bersangkutan, yaitu: jumlah kolom dari matriks/vektor yang ada di depan harus sama dengan jumlah baris dari matriks/vektor yang ada di belakang. Untuk kasus perkalian skalar, hal ini tidak perlu dipersyaratkan. Skalar bisa dikalikan dengan vektor atau matriks dengan dimensi apapun. Hal ini karena skalar bisa dipandang dan diperlakukan sebagai layaknya bilangan.

a. Perkalian Skalar dengan Vektor

Pada contoh 4.5. diberikan ilustrasi mengenai perkalian antara vektor dengan dimensi (3 x 1) dengan vektor yang mempunyai dimensi (1 x 3). Hasil perkalian tersebut merupakan sebuah matriks yang mempunyai dimensi (3 x 3). Sekarang bayangkan seandainya diambil hanya baris pertama dari vektor R pada contoh 4.5. yang berupa skalar [7], maka mengikuti hasil yang ada pada contoh tersebut, hasil perkalian skalar ini dengan vektor S akan berupa baris pertama dari matriks U pada contoh tersebut. Begitu juga jika diambil baris kedua dan kemudian baris ketiga dari vektor R dan dikalikan dengan vektor S maka hasilnya akan berupa baris kedua dan baris ketiga dari matriks U pada contoh tersebut.

$$[7]\,[5 \quad 0 \quad 9] = [35 \quad 0 \quad 63]$$
$$[3]\,[5 \quad 0 \quad 9] = [15 \quad 0 \quad 27]$$
$$[11]\,[5 \quad 0 \quad 9] = [55 \quad 0 \quad 99]$$

Contoh di atas memberikan ilustrasi mengenai perkalian antara skalar dan vektor. Di sana bisa dilihat bagaimana aturan mengenai perkalian skalar, yaitu: setiap elemen yang ada pada vektor, atau matriks, dikalikan secara langsung dengan skalar pengali. Karena sifat perkalian yang seperti ini maka perkalian dengan skalar tidak merubah dimensi dari vektor atau matriks yang dikalikan.

b. Perkalian Skalar dengan Matriks

Pada bagian di atas telah memberikan ilustrasi dan sekaligus kaidah mengenai perkalian antara skalar dengan vektor. Sekarang, ketika ada keperluan untuk mengetahui hasil perkalian antara skalar dan matriks maka tatacara perkalian antara skalar dan vektor di atas juga berlaku bagi kasus perkalian antara skalar dan matriks. Contoh berikut memberikan ilustrasi mengenai hal ini.

$$[8]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 & 16 \\ 24 & 40 \end{bmatrix}$$

$$[4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 36 \\ 8 & 4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$[6]\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 7 \\ 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 30 & 0 \\ 48 & 12 & 42 \\ 36 & 6 & 54 \end{bmatrix}$$

$$[2]\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 8 \\ 14 & 4 \end{bmatrix}$$

4.4. Transpose Lanjutan

4.4.1. Sifat-sifat Transpose

Transpose mempunyai sifat-sifat berikut ini: (4.4.5)

$$(A^T)^T = A \text{ (a)}$$

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ (b)}$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \text{ (c)}$$

Sifat-sifat di atas bisa ditunjukkan dengan pemaparan berikut ini:

a). Tengok lagi ekspresi matriks dalam (4.4.1), (4.4.1), (4.4.1) dan (4.4.1). Jika kepada vektor-vektor dan matriks yang ada dilakukan taranspose maka hal ini akan kembali menjadi:

$$(\mathbf{a}^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{a}\ ;\ (\mathbf{b}^T)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \mathbf{b};\ (\mathbf{c}^T)^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{c}$$

Vektor-vektor di atas tidak lain adalah vektor-vektor pada (4.2.1)

$$(\mathbf{A}^T)^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$

Matriks di atas tidak lain adalah matriks pada (4.2.2)

$$(\mathbf{B}^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Matriks di atas tidak lain adalah matriks pada (4.2.3)

b). Untuk menunjukkan sifat kedua dari transpose, lihatlah matriks-matriks berikut ini:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\ \mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}; \; L^T = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$KL = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 45 & 22 \end{bmatrix}$$

$$(KL)^T = \begin{bmatrix} 9 & 45 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$$

$$L^T * K^T = \begin{bmatrix} 9 & 45 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$$

Dari hasil perkalian yang ada di atas terlihat bahwa $(KL)^T$ sama dengan L^T*K^T.

c). Untuk menunjukkan sifat ketiga dari transpose, lihatlah kembali matriks **K** dan matriks **L** di atas dan cermatilah operasi di bawah ini.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{M}$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Sekarang cermatilah lagi K^T dan L^T. Jika $K^T + L^T$, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^T$$

4.4.2. Penjumlahan dengan Transpose

Setelah mengetahui bagaimana tatacara perkalian maka berikut ini akan disajikan kegunaan dari transpose.

Tengoklah lagi vektor c dalam (4.2.1) di atas. Jika kemudian akan dicari jumlah dari kuadrat dari masing-masing elemen, maka hal ini bisa dilakukan sebagai berikut.

Elemen(c)	Kuadrat
2	4
1	1

7	49
0	0
4	16
$\sum c = 14$	$\sum c^2 = 70$

$$c_{(5\times1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jika vektor di atas kemudian dikalikan dari depan dengan transposenya,

$$c^T_{(1\times5)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix};\ c_{(5\times1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

maka hasilnya akan berupa suatu skalar, yaitu: 70 yang mana hal ini sama dengan jumlah kuadrat dari elemen-elemen yang ada. Dengan demikian maka bisa diambil suatu rumusan bahwa:

$$\sum c^2 = c^T \times c \qquad (4.4.6)$$

Selanjutnya ambilah suatu vektor sebut *iota* yang berbentuk sebagai berikut:

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ i^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Perhatikan perkalian dua vektor berikut ini:

$$i^T.c = 14 = \sum c$$

Dengan melihat hasil di atas, maka bisa diambil suatu formulasi bahwa:

$$\sum c = i^T \times c \qquad (4.4.7)$$

Jika c merupakan vektor kolom. Selanjutnya ambillah vektor lain yang berbentuk vektor baris sebagai berikut ini:

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Perhatikanlah hasil perkalian berikut ini:

$$d.i = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}; i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 13 = \sum d$$

Dengan melihat hasil di atas, maka bisa diformulasikan bahwa:

$$\sum d = d \times i \qquad (4.4.8)$$

jika d merupakan vektor baris.

Selanjutnya perhatikan dua buah vektor di bawah ini.

$$k = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad ; l = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Jika kemudian dicari jumlah dari perkalian dari elemen-elemen yang ada maka hal ini bisa dilakukan dengan cara berikut ini:

Elemen k	Elemen l	k x l
5	1	5
7	3	21
9	6	54
1	2	2
8	4	32
		$\sum k = 114$

Hasil di atas bisa diperbandingkan dengan hasil-hasil kali berikut ini.

$$k^T.l = \begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\\4\end{bmatrix}$$
$$= 114$$

$$l^T.k = \begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\\9\\1\\8\end{bmatrix}$$
$$= 114$$

Jika hasil-hasil yang diperoleh melalui ketiga cara diperbandingkan maka terlihat bahwa ketiganya adalah sama. Oleh karena itu bisa disimpulkan bahwa:

$$\sum kl = k^T\, l = l^T \,.\, k \qquad (4.2.4.9)$$

4.5. Hukum-hukum Aljabar untuk Matriks

Sebagaimana bilangan, matriks juga tunduk pada hukum-hukum aljabar.

a. **Hukum Komutatif Penjumlahan**

Hukum komutatif ini hanya berlaku bagi penjumlahan matriks saja.

$$A + B = B + A$$
$$AB \neq BA$$

Sebagai ilustrasi mengenai hal, pandanglah matriks-matriks berikut ini:

$$G = \begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 0\\5 & 1\end{bmatrix} : H = \begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 2\end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix}2 & 3\\7 & 1\end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix}11 & 2\\15 & 3\end{bmatrix} (4.6.1)$$

$$\mathbf{H} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 3\\7 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 7\\12 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} + \mathbf{H} = \begin{bmatrix}2 & 3\\7 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 4\\5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 7\\12 & 3\end{bmatrix}$$

Terlihat di atas bahwa ternyata **H** + **I** = **I** + **H**, sehingga bisa dikatakan bahwa hukum komutatif penjumlahan berlaku pada matriks

Untuk menunjukkan tidak berlakunya hukum komutatif untuk kasus perkalian, pertimbangkanlah **H** x **I**,

$$\mathbf{HI} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, pertimbangkanlah **I** x **H**,

$$\mathbf{IH} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \text{x} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 14 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$$

Bandingkanlah kedua hasil perkalian di atas dan terlihat bahwa

H x **I** ≠ **I** x **H**

Ini berarti bahwa hukum komutatif tidak berlaku untuk perkalian matriks.

b. Hukum Asosiatif

$$A + (B+C) = (A + B) + C$$

Untuk melihat hal ini tambahkanlah terhadap hasil penjumlahan matriks-matriks **H** + **I** dengan matrks **J**,

$$(\mathbf{H} + \mathbf{I}) + \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 12 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 15 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}$$

Untuk mempersiapkan pembandingan, pertimbangkanlah penjumlahan kedua matriks di bawah ini.

$$\mathbf{I} + \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 15 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} + (\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} + (\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 27 & 6 \end{bmatrix}$$

Sekarang bandingkanlah, terlihat bahwa:

$$(\mathbf{H} + \mathbf{I}) + \mathbf{J} = \mathbf{H} + (\mathbf{I} + \mathbf{J})$$

Dengan demikian hukum asosiatif penjumlahan berlaku bagi matriks.

Selain kasus penjumlahan, hukum asosiatif juga berlaku pada kasus perkalian, yaitu:

$$\mathrm{A(BC) = (AB)C}$$

Untuk melihat berlakunya hukum ini pada kasus perkalian, berikut ini diberikan pembahasan mengenai hal ini. Untuk memulai, pertimbangkanlah matriks dan vektor-vektor berikut ini.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.6.2)$$

Perkalian antara **A** dan **B** dari (4.6.2) menghasilkan

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 60 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad (4.6.3).$$

Seterusnya perkalian antara **AB**, dari (4.6.3), dan **C** dari (4.6.2), menghasilkan:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 60 & 300 & 120 \\ 12 & 60 & 24 \end{bmatrix} \qquad (4.6.4)$$

Untuk membuat perbandingan, perhatikanlah perkalian antara matriks **B** dan matriks **C**, dari (4.6.2), yang menghasilkan:

$$\mathbf{BC} = G := \begin{bmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 8 & 40 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil perkalian antara matrks **B** dan matriks **C** dikalikan dengan matriks A, dari (4.6.2), yang menghasilkan matriks:

$$:\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} 60 & 300 & 120 \\ 12 & 60 & 24 \end{bmatrix} \qquad (4.6.5)$$

Ternyata matriks yang merupakan hasil kali antara (**AB**)**C** pada ekspresi (4.6.4) adalah sama dengan matriks hasil kali antara A(**BC**) pada (4.6.5). Hal ini berarti bahwa:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

Hal ini menunjukkan bahwa hukum asosiatif juga berlaku untuk kasus perkalian matriks. Namun begitu masih ada satu hal yang harus dicatat dalam kasus ini yaitu kecocokan dimensi dari ketiga matriks di atas sebagai syarat untuk bisa diperkalikan.

c. **Hukum Distributif**

Hukum distributif mendiktekan bahwa:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Untuk melihat hal ini pada kasus matriks lihatlah kembali matriks-matriks **H**, **I** dan **J** dalam (4.6.1) di atas.

$$(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \begin{bmatrix} 101 & 21 \\ 109 & 33 \end{bmatrix} \qquad (4.6.6)$$

Sekarang, untuk mempersiapkan perbandingan kalikan matriks **H** dengan matriks **I** dan juga dengan matriks **J** menjadi:

$$\mathbf{HI} = \begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HJ} = \begin{bmatrix} 71 & 14 \\ 85 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HI} + \mathbf{HJ} = \begin{bmatrix} 101 & 21 \\ 109 & 33 \end{bmatrix} \qquad (4.6.7)$$

Bandingkanlah hasil yang diperoleh pada (4.6.6) dan (4.6.7) di atas. Terlihat keduanya adalah sama sehingga

$$\mathbf{H}(\mathbf{I} + \mathbf{J}) = \mathbf{HI} + \mathbf{HJ} \qquad (4.6.8)$$

Dengan demikian bisa dikatakan bahwa hukum distributif tidak hanya berlaku pada bilangan saja tetapi juga berlaku untuk matriks.

5. Tipe-tipe Matriks

5.1. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu bentuk matriks di mana semua elemen yang ada adalah nol kecuali elemen-elemen yang ada pada diagonalnya. Berikut ini adalah contoh dari matriks diagonal.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5.2. Matriks Identitas

Matriks ini merupakan bentuk khusus dari matriks diagonal. Disebut demikian karena pada dasarnya matriks ini adalah matriks diagonal. Kalau pada matriks diagonal elemen-elemen yang ada pada diagonal mempunyai sifat umum dalam arti bahwa elemen-elemen tersebut mempunyai nilai sebarang. Sementara dalam matriks identitas, elemen-elemen tersebut besarnya semuanya adalah satu (unity). Berikut ini adalah contoh-contoh dari matriks identitas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks tersebut mempunyai sifat yang khas, yakni dia mempunyai sifat seperti bilangan 1 (*unity*). Sebagaimana bilangan 1 (satu), matriks ini jika berperan sebagai pengali maka tidak akan mengubah matriks yang dikalikan. Berdasar sifatnya yang demikian, maka matriks ini biasa disebut juga sebagai matriks *unity*. Untuk melihat sifatnya yang demikian berikut ini diberikan contoh-contoh sebagai ilustrasi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1\times 3)+(0\times 11)) & ((1\times 7)+(0\times 14)) \\ ((0\times 3)+(1\times 11)) & ((0\times 7)+(1\times 14)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((1\times 17)+(0\times -4)) \\ ((0\times 17)+(1\times -4)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ((1\times 2)+(0\times 5)+(0\times 4)) & ((1\times 1)+(0\times 0)+(0\times 2)) & ((1\times 6)+(0\times 2)+(0\times 3)) \\ ((0\times 2)+(1\times 5)+(0\times 4)) & ((0\times 1)+(1\times 0)+(0\times 8)) & ((0\times 6)+(1\times 2)+(0\times 3)) \\ ((0\times 2)+(0\times 5)+(1\times 4)) & ((0\times 1)+(0\times 0)+(1\times 8)) & ((0\times 6)+(0\times 2)+(1\times 3)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad (4.7.2)$$

Lihatlah, pada contoh-contoh di atas hasil akhir perkalian antara matriks identitas selalu menghasilkan vektor atau matriks asal.

Sekarang, bagaimana hasil yang akan diperoleh jika matriks-matriks di atas dikalikan, dari belakang, dengan matriks identitas. Berikut ini akan diberikan ilustrasi mengenai hal ini.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((3\times 1)+(7\times 0)) & ((3\times 0)+(7\times 1)) \\ ((11\times 1)+(14\times 0)) & ((11\times 0)+(14\times 1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(4.7.3)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ((2\times 1)+(1\times 0)+(6\times 0)) & ((2\times 0)+(1\times 1)+(6\times 0)) & ((2\times 0)+(1\times 0)+(6\times 1)) \\ ((5\times 1)+(0\times 0)+(2\times 0)) & ((5\times 0)+(0\times 1)+(2\times 0)) & ((5\times 0)+(0\times 0)+(2\times 1)) \\ ((4\times 1)+(8\times 0)+(3\times 0)) & ((4\times 0)+(8\times 1)+(3\times 0)) & ((4\times 0)+(8\times 0)+(3\times 1)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad (4.7.4)$$

Bandingkanlah hasil kali-hasil kali di atas: (4.7.1) dan (4.7.3) serta (4.7.2) dan (4.7.4). Bisa dilihat di sana bahwa mereka tepat sama satu dengan yang lain. Mempertimbangkan hal di atas maka bisa disimpulkan bahwa:

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI}$$

di mana A adalah matriks bujur sangkar.

Hal ini berarti bahwa kasus di atas merupakan pengecualian atas ketidak-berlakuan hukum komutatif pada kasus perkalian.

5.3. Matriks Nol

Matriks nol adalah suatu matrik di mana semua elemen yang ada berupa bilangan nol. Berikut ini adalah berbagai contoh yang memberikan ilustrasi mengenai hal ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks ini mempunyai sifat khas seperti bilangan nol yang mana matriks manapun, yang mempunyai kecocokan dimensi, jika dikalikan dengannya akan menjadi matriks nol juga. Lihatlah contoh-contoh berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((0\times 3)+(0\times 11)) & ((0\times 7)+(0\times 14)) \\ ((0\times 3)+(0\times 11)) & ((0\times 7)+(0\times 14)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ((0\times 1)+(0\times 3)) & ((0\times 7)+(0\times 1)) & ((0\times 2)+(0\times 8)) \\ ((0\times 1)+(0\times 3)) & ((0\times 7)+(0\times 1)) & ((0\times 2)+(0\times 8)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 8 \\ 14 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ((0\times 10)+(0\times 2)+(0\times 14)) & ((0\times 4)+(0\times 8)+(0\times 4)) \\ ((0\times 10)+(0\times 2)+(0\times 14)) & ((0\times 4)+(0\times 8)+(0\times 4)) \\ ((0\times 10)+(0\times 2)+(0\times 14)) & ((0\times 4)+(0\times 8)+(0\times 4)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.4. Matriks Simetri

Matriks simetri adalah suatu matriks jika diambil transposenya maka akan menghasilkan matriks itu sendiri. Berikut ini adalah contoh-contoh mengenai hal ini.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Perhatikanlah bahwa setiap matriks diagonal juga merupakan matriks simetri.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = A$$

Perlu dicatat, mengingat bahwa matriks identitas merupakan bentuk khusus dari matriks diagonal maka dengan demikian matriks tersebut juga mempunyai sifat simetri.

$$I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \; I_N^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_N .$$

$$I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; I_N^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_N$$

5.5. Matriks Idempoten

Matriks idempoten adalah suatu matriks di mana jika matriks tersebut dikuadaratkan akan menghasilkan matriks itu sendiri. Matriks identitas dan matriks nol adalah contoh dari matriks idempoten. Hal ini sesuai dengan sifat matriks identitas yang memiliki sifat seperti bilangan satu dan matriks nol yang mempunyai sifat seperti bilangan 0 (nol). Sebagai matriks yang membawa sifat bilangan satu maka matriks identitas tersebut jika dikuadratkan akan kembali menjadi matriks itu sendiri. Begitu juga untuk matriks nol, yang merepresentasikan sifat bilangan 0 (nol), jika dia dikuadratkan akan tetap menjadi dirinya sendiri.

$$I^2 = I \times I = I$$

$$\mathbf{I} \times \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times1)+(0\times0) & (1\times0)+(0\times1) \\ (0\times1)+(1\times0) & (0\times0)+(1\times1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{I}$$

Hal yang sama juga terjadi pada matriks nol.

$$\mathbf{O}^2 = \mathbf{O} \times \mathbf{O} = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{O} \times \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0\times0)+(0\times0) & (0\times0)+(0\times0) \\ (0\times0)+(0\times0) & (0\times0)+(0\times0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{O}$$

Namun demikian, dalam matriks hal ini tidak demikian. Tidak hanya matriks identitas dan matriks nol saja yang jika dikuadratkan hasilnya akan kembali menjadi dirinya sendiri. Matriks idempoten merupakan contoh dalam hal ini. Sebagai ilustrasi, pandanglah matriks berikut ini.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jika matriks **A** di atas dikuadratkan, maka hasilnya adalah:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Jadi, $A^2 = A$

Lihat lagi matriks berikut ini.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jika matriks **B** dikuadratkan maka hasilnya adalah:

$$B^2 = B*B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times 2)+(1\times -2) & (2\times 1)+(1\times -1) \\ (-2\times 2)+(-1\times -2) & (-2\times 1)+(-1\times -1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= B$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ((1\times 1)+(0\times 0)) & ((1\times 0)+(0\times 0)) \\ ((0\times 1)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(0\times 0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ((0\times 0)+(0\times 0)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(0\times 1)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(0\times 0)+(0\times 0)) \\ ((0\times 0)+(1\times 0)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(1\times 1)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(1\times 0)+(0\times 0)) \\ ((0\times 0)+(0\times 0)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(0\times 1)+(0\times 0)) & ((0\times 0)+(0\times 0)+(0\times 0)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

Perlu di catat di sini bahwa setiap matriks diagonal di mana elemen-elemen diagonalnya berupa bilangan satu atau nol maka matriks tersebut merupakan matriks idempoten. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa matriks identitas dan matriks nol adalah merupakan beberapa di antara matriks idempoten.

5.6. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah suatu matriks di mana elemen-elemen di atas ataupun di bawah diagonal matriks tersebut semuanya adalah nol. Jika elemen-elemen yang semuanya nol berada di atas diagonal maka matriks tersebut disebut sebagai matriks segitiga atas. Sebaliknya jika elemen-elemen yang semuanya nol berada di bawah diagonal maka matriks ini disebut sebagai matriks segitiga bawah. Berikut ini diberikan contoh-contoh sebagai ilustrasi.

a. Matriks segitiga atas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 12 & 6 \end{bmatrix} \qquad (4.7.5)$$

b. Matriks segitiga bawah

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.7.6)$$

Matriks **A** dan matriks **B** adalah matriks segitiga atas karena elemen di atas diagonal matriks tersebut adalah nol. Adapun matriks **C** dan matriks **D** adalah matriks segitiga bawah karena elemen-elemen di bawah diagonal matriks tersebut semuanya adalah nol.

6. Determinan

Determinan adalah suatu skalar yang terdefinisi secara unik yang berkaitan dengan suatu matriks. Determinan hanya bisa diperoleh dari matriks bujur sangkar. Determinan disimbolkan sebagai tanda "| |", atau dengan cara lain yaitu dengan menuliskan kata "det" di depan simbol matriks. Misalnya det. (A) menunjukkan determinan dari matriks A.

Mengingat bahwa dimensi paling rendah dari matriks bujur sangkar adalah (1 x 1) maka determinan dari matriks tersebut adalah satu-satunya elemen yang ada pada matriks tersebut. Pandanglah matriks di bawah ini

$$\underset{(1\times 1)}{A} = [a_{ij}],$$
$$|A| = a_{ij}(4.8.1)$$

Harap dicatat bahwa tanda "| |", walaupun mirip, namun tidak ada kaitannya dengan tanda "nilai absolute". Hal ini bisa dilihat pada ekspresi (4.8.1) di mana a_{ij} adalah determinan dari matriks A, $|A|$. Lihatlah, walaupun A berada dalam tanda "| |", namun nilai yang terkandung merupakan bilangan nyata sebarang termasuk bilangan negatif. Hal ini menunjukkan bahwa tanda "| |" tidak merupakan tanda "nilai absolute".

6.1. Menemukan Determinan Matriks Dimensi 2 x 2

Matriks dengan dimensi 2 x 2 bisa ditemukan nilai determinannya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$
$$det.\ A = |A| = ad - cb \quad (4.8.2)$$

$$|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Perhatikanlah matriks di bawah ini.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$
$$|A| = (6 \times 4) - (1 \times 0)$$
$$|A| = 24 - 0 = 24$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$
$$|B| = (0 \times 1) - (11 \times 11)$$
$$= 0 - 121$$
$$= -121$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} |C| &= (9 \times 1) - (3 \times 3) \\ &= 9 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

6.2. Menemukan Determinan Matriks Dimensi 3 x 3

Menemukan determinan dari matriks berdimensi 3 x 3 berbeda dengan menemukan hal yang sama pada matriks yang berdimensi 2 x 2. Matriks dengan dimensi 3 x 3 menghadirkan kompleksitas dalam menemukan nilai determinannya. Berikut ini adalah contoh mencari determinan matriks berdimensi 3 x 3.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|\;| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 4 & 8 \end{array} \right.$$

$$= ((2 \times 0 \times 3) + (1 \times 2 \times 4) + (6 \times 5 \times 8)) - (4 \times 0 \times 6) + (8 \times 2 \times 2) + (3 \times 5 \times 1))$$

$$= (0 + 8 + 240) - (0 + 32 + 15)$$

$$|A| = 241$$

Prosedur:

Tuliskan seluruh elemen matriks dengan tetap menghormati posisi dari masing-masing elemen

a. Tuliskan kolom ke-1 dan kolom ke-2 dari matriks secara sejajar di sebelah kanan dari elemen-elemen matriks yang telah lebih dahulu dituliskan.

b. Beri nama pada diagonal yang dibentuk melalui panah kebawah sebagai diagonal ke bawah. Sedangkan diagonal yang dibentuk melalui panah keatas sebagai diagonal keatas.

c. Ambil jumlah hasil kali dari elemen-elemen diagonal ke bawah

d. Ambil jumlah hasil kali dari elemen- elemen diagonal ke atas

e. Kurangkan jumlah hasil kali dari elemen-elemen diagonal ke atas dari jumlah hasil kali dari elemen- elemen diagonal ke bawah

f. Hasilnya merupakan determinan dari matriks yang bersangkutan

Contoh 4.7.

Cari determinan dari matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}; \qquad (4.8.3)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 4 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right.$$

=((0x6x2) + (4x2x3) + (8x1x5)) - ((3x6x8) + (5x2x0) + (2x1x4))

= (0 + 24 + 40) – (144 + 0 + 8)

= - 84

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & -5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 8 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 6 & -5 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right.$$

=((8x6x-3) + (4x5x2) + (4x1x5)) - ((2x6x4) + (5x-5x8) + (-3x1x4))

= (-144 - 40 + 20) – (48 - 200 - 12)

$|B| = 0$

6.3. Minor dan Kofaktor

Minor dan kofaktor telah menjadi topik bahasan utama dalam aljabar linier. Minor dan kofaktor telah memberikan sumbangan yang sangat berarti pada usaha penemuan nilai determinan dari matriks-matriks dengan dimensi yang lebih tinggi. Pembahasan pada bagian di bawah ini memberikan diskusi mengenai kedua hal ini.

6.3.1. Minor

Suatu determinan mempunyai beberapa sub determinan yang disebut sebagai minor. Minor diperoleh dengan cara menghapus baris tertentu dan kolom tertentu dari suatu matriks yang kemudian dari elemen-elemen sisanya dicari nilai determinan.

Minor disimbolkan sebagai M_{ij}. Subscript ij yang muncul di sana tidak menunjukkan posisi dari minor tersebut sebagaimana pada elemen matriks yang menunjukkan pada posisi baris dan kolom keberapa suatu elemen berada. Melainkan, hal ini menunjukkan baris dan kolom keberapa yang harus dihapus.

Dalam setiap matriks jumlah minor yang muncul menyesuaikan dengan dimensi yang dipunyai oleh matriks yang bersangkutan. Matriks dengan dimensi 2 x 2 mempunyai minor sebanyak 4, yaitu:

$$M_{11}, M_{12}, M_{21} \text{ dan } M_{22}$$

Adapun matriks dengan dimensi 3 x 3 mempunyai minor sebanyak 9 yaitu:

$$M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{31}, M_{32}, M_{33}.$$

Berikut ini adalah contoh mengenai minor. Pertimbangkan kembali matriks berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.8.4)$$

M_{11} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1 dan kolom ke-1, sehingga:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = (6 \times 2) - (5 \times 2)$$

$$M_{11} = 2$$

M_{12} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1 dan kolom ke-2, sehingga:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = (1 \times 2) - (3 \times 2)$$

$$M_{12} = -4$$

M_{13} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-1 dan kolom ke-3, sehingga:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = (1 \times 5) - (3 \times 6)$$

$$M_{13} = -13$$

M_{21} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-2 dan kolom ke-1, sehingga:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = (4 \times 2) - (5 \times 8)$$

$$M_{21} = -32$$

M_{22} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-2 dan kolom ke-2, sehingga:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = (0 \times 2) - (3 \times 8)$$

$$M_{22} = -24$$

M_{23} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-2 dan kolom ke-3, sehingga:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = (0 \times 5) - (3 \times 4)$$
$$M_{23} = -12$$

M_{31} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-3 dan kolom ke-1, sehingga:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = (4 \times 2) - (6 \times 8)$$
$$M_{31} = -40$$

M_{32} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-3 dan kolom ke-2, sehingga:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{32} = (0 \times 2) - (1 \times 8)$$
$$M_{32} = -8$$

M_{33} adalah merupakan minor yang diperoleh dengan cara menghapus baris ke-3 dan kolom ke-3, sehingga:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{33} = (0 \times 6) - (1 \times 4)$$
$$M_{33} = -4$$

6.3.2. Kofaktor

Konsep kofaktor sangat berkaitan dengan minor. Kofaktor ini juga sangat berperan dalam membentuk inverse dari suatu matriks. Kofaktor secara aljabar didefinisikan sebagai:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}(M_{ij})$$

Berikut ini diberikan contoh-contoh untuk menemukan kofaktor dari minor. Untuk keperluan ini lihat kembali matriks A pada ekspresi (4.8.4)

Kofaktor (C_{11})

$$C_{11} = (-1)^{1+1}(M_{11})$$
$$C_{11} = (-1)^{2}(2)$$
$$C_{11} = (-1)^{2}(2)$$
$$C_{11} = 2$$

Kofaktor (C_{12})

$$C_{12} = (-1)^{1+2}(M_{12})$$
$$C_{12} = (-1)^{3}(-4)$$
$$C_{12} = 4$$

Kofaktor (C_{13})

$$C_{13} = (-1)^{1+3}(M_{13})$$
$$C_{13} = (-1)^{4}(-13)$$
$$C_{13} = -13$$

Kofaktor (C_{21})

$$C_{21} = (-1)^{2+1}(M_{21})$$
$$C_{21} = (-1)^{3}(-32)$$
$$C_{21} = 32$$

Kofaktor (C_{22})

$$C_{22} = (-1)^{2+2}(M_{32})$$
$$C_{22} = (-1)^{4}(-24)$$
$$C_{22} = -24$$

Kofaktor (C_{23})

$$C_{23} = (-1)^{2+3}(M_{23})$$
$$C_{23} = (-1)^{5}(-12)$$
$$C_{23} = 12$$

Kofaktor (C_{31})

$$C_{31} = (-1)^{3+1}(M_{31})$$
$$C_{31} = (-1)^{4}(-40)$$
$$C_{31} = -40$$

Kofaktor (C_{32})

$$C_{32} = (-1)^{3+2}(M_{32})$$
$$C_{32} = (-1)^{3}(-8)$$
$$C_{32} = 8$$

Kofaktor (C_{33})

$$C_{33} = (-1)^{3+3}(M_{33})$$
$$C_{33} = (-1)^{6}(-4)$$
$$C_{33} = -4$$

Perhatikanlah hasil-hasil yang diperoleh di atas. Kofaktor tidak lain sebenarnya adalah minor, hanya saja tanda yang dipunyai berubah ketika jumlah (i + j) adalah ganjil. Dengan demikian maka untuk selanjutnya dalam usaha menemukan kofaktor tidak perlu menggunakan rumus formal seperti yang dilakukan di atas namun cukup menggunakan "*rule of thumb*", yaitu: mengubah tanda dari minor ketika (i + j) adalah ganjil. Sementara minor yang lain yang mana (1 + j) adalah genap maka nilai kofaktornya adalah minor itu sendiri.

6.4. Mencari Determinan dengan Metode La Place

Selain cara-cara yang telah dipaparkan di atas dalam menemukan determinan, ada cara lain untuk memperoleh determinan. Cara ini biasa disebut sebagai ekspansi La Place. Metoda ini mendasarkan pada penggunaan kofaktor. Dalam metode ini determinan bisa diekspresikan dalam beberapa cara, yaitu dengan mengekspresikannya melalui baris atau kolom tertentu. Adapun ekspresi formal dari metoda ini adalah:

$$|A| = \sum a_{ij} C_{ij} \qquad (4.8.5)$$

di mana a_{ij} adalah elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j; C_{ij} adalah kofaktor ke-ij.

Untuk melihat hal ini ambillah kembali di sini suatu matriks dengan dimensi 2 x 2 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad (4.8.6)$$

Dari matriks di atas bisa ditemukan semua minor yang ada, yaitu:

M_{11} = d; M_{12} = c; M_{21} = b; M_{22} = a.

Dengan demikian kofaktornya bisa diperoleh melalui "*rule of thumb*", yaitu:

C_{11} = d; C_{12} = -c; C_{21} = -b; C_{22} = a

Jika determinan diekspresikan pada baris ke-1, maka akan diperoleh:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \qquad (4.8.7)$$

Perhatikan ekspresi di atas bahwasanya baris ke-1dari matriks (4.8.7) yang mempunyai dimensi 2 x 2 hanya mempunyai dua kolom, sehingga ekspresi determinan yang sesuai dengan metoda La Place sebagaimana ditunjukkan pada (4.8.7) adalah ekspresi (4.8.7).

Dengan menggunakan nilai-nilai kofaktor dari matriks (4.8.7), maka nilai determinan matriks tersebut adalah:

$$|A| = ad + b(-c)$$
$$= ad - bc$$

Metode ini juga memberikan kebebasan dalam memilih baris atau kolom mana yang akan digunakan untuk mengekspresikan determinan. Untuk melihat hal ini pertimbangkan kembali matriks (4.8.7) beserta nilai-nilai kofaktor yang telah diperoleh di depan.

Sekarang determinan matriks tersebut akan diekspresikan melalui baris ke-2, sehingga ekspresi yang sesuai dengan metoda La Place sebagaimana pada (4.8.7) adalah:

$$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \qquad (4.8.8)$$

Perhatikan sekarang bahwasanya setiap item yang ada pada ekspresi di atas berasal dari baris ke-2 matriks berdimensi 2 x 2. Seterusnya. untuk menemukan nilai determinan tinggal memasukkan nilai-nilai elemen dan kofaktor yang bersangkutan, yaitu:

$$|A| = c\,(-b) + da$$
$$|A| = -bc + da = ad - bc$$

Jika determinan diekspresikan melalui kolom ke-1, maka ekspresi La place nya adalah:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21}$$

Lihatlah bahwa semua item yang ada pada ekspresi di atas berasal dari kolom ke-1 dari matriks dengan dimensi 2 x 2. Dengan demikian nilai determinannya adalah:

$$|A| = ad + c(-b)$$
$$|A| = ad - bc$$

Jika determinan diekspresikan melalui kolom ke-2, maka ekspresi La place nya adalah:

$$|\mathbf{A}| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22}$$

Perhatikanlah bahwasanya semua item yang ada pada ekspresi di atas berasal dari kolom ke-2 dari matriks dengan dimensi 2 x 2. Dengan demikian nilai determinannya adalah:

$$|\mathbf{A}| = b(-c) + d(a)$$

$$|\mathbf{A}| = -bc + da$$

$$|\mathbf{A}| = ad - bc$$

Perhatikanlah hasil dari setiap determinan yang diekspresikan melalui berbagai cara, yaitu: baris ke-1, baris ke-2, kolom ke-1 dan kolom ke-2. Setiap hasil yang disebuat menunjukkan kesamaan satu sama lain yang semuanya sama dengan formula yang disebut pada bagian 8.1. Dengan demikian maka tidak menjadi masalah untuk mengekspresikan suatu determinan melalui cara yang berbeda karena hasilnya akan selalu sama dan benar.

Metoda La Place ini mempunyai keunggulan dalam hal mencari nilai determinan dari matriks berdimensi lebih tinggi, misalnya 4 x 4 atau yang lebih tinggi yang belum di bahas pada bagian-bagian di depan. Untuk melakukan hal ini lihatlah contoh berikut ini.

Contoh 4.8.

Carilah determinan dari matriks di bawah ini:

$$\underset{(4\times4)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad (4.8.9)$$

Untuk mencari determinan dari matriks di atas dengan menggunakan metoda La Place bisa ditempuh dengan mengekspresikan melalui baris yang manapun maupun kolom yang manapun. Namun begitu demi kemudahan operasi perlu dicermati terlebih dahulu masing-masing baris atau kolom yang ada. Hal ini mengingat bahwa setiap elemen dalam matriks tersebut akan dikalikan dengan kofaktor yang menjadi padanannya. Jika setiap elemen yang ada pada baris atau kolom, di mana determinan akan diekspresikan, adalah bilangan selain nol maka berarti perkaliannya adalah suatu bulangan tertentu. Tetapi jika terdapat elemen yang nilainya nol maka hasil kali dari elemen tersebut dengan kofaktor padanannya, terlepas berapapun besarnya kofaktor tersebut, maka hasilnya akan menjadi nol. Hal ini berarti hasil kali elemen tersebut menjadi terabaikan. Di sini terasakan adanya sedikit kemudahan dalam kalkulasi, yaitu kofaktor yang merupakan padanan dari elemen yang nilainya nol menjadi tidak perlu untuk dicari.

Untuk itu guna memperoleh cara menemukan determinan dengan cara yang paling mudah maka determinan perlu diekspresikan melalui baris atau kolom yang mempunyai elemen dengan nilai nol terbanyak. Matriks A pada (4.8.9) mempunyai dimensi (4 x 4) yang berarti terdapat 8 (delapan) cara untuk mengekspresikan determinan dari matriks tersebut. Namun begitu baris ke-1 merupakan pilihan yang terbaik untuk mengekspresikan determinan matriks tersebut. Hal ini disebabkan karena elemen pada baris pertama semuanya adalah nol hanya pada a_{13} saja yang mempunyai nilai bukan nol. Untuk itu jika determinan diekspresikan melalui baris ini maka hanya akan ada satu kofaktor saja yang diperlukan untuk menemukan nilai determinan, yaitu C_{13}.

Untuk memperoleh C_{13} maka perlu ditemukan nilai M_{13} terlebih dahulu yang bisa didapat dari operasi berikut ini.

M_{13} =

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Sehingga elemen dari minor yang tersisa adalah:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

Dari elemen yang tersisa ini bisa diperoleh nilai minornya, yaitu dengan cara yang sama ketika menemukan nilai determinan.

$$|M_{11}| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 9 & 6 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right.$$

$$=((3\times1\times6)+(9\times3\times2)+(6\times5\times2))-((2\times1\times6)+(2\times3\times3)+(6\times5\times9))$$
$$= (18 + 54 + 60) - (12 + 18 + 270)$$
$$|M_{11}| = -168$$
$$C_{13} = -168$$

Adapun ekspresi determinannya adalah sebagai berikut:

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14}$$
$$|A| = 0.\ C_{11} + 0.C_{12} + 7.(-168) + 0.C_{14}$$
$$|A| = -1176$$

Cermatilah proses penemuan nilai determinan dari matriks di atas. Walaupun matriks di atas mempunyai dimensi (4 x 4), namun ternyata prosesw penemuan determinannya tidak jauh berbeda dengan matriks dengan dimensi (3 x 3). Hal ini disebabkan karena kejelian dalam memilih baris di mana determinan diekspresikan.

Contoh 4.9:

Pandanglah matriks berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 11 & 9 \\ 12 & 17 & 0 & -21 & 15 \\ -8 & 4 & 0 & 2 & 23 \\ 13 & 2 & 0 & 6 & 17 \\ 5 & -1 & 0 & 22 & 1 \end{bmatrix}$$

Temukan nilai dari matriks di atas.

Matriks di atas walaupun mempunyai dimensi yang tinggi yaitu (5 x 5), namun determinannya bisa ditemukan dengan sangat mudah yaitu sebesar nol. Untuk mengetahui hal ini perhatikanlah bahwa matriks A di atas mempunyai satu kolom, yaitu kolom ke-3, yang mana nilai dari setiap elemennya adalah nol. Dengan demikian jika determinan dari matriks tersebut diekspresikan melalui kolom ini maka tidak diperlukan untuk menemukan kofaktor-kofaktor padanan dari setiap elemen yang ada. Hal ini karena elemen-elemen pengali dari semua kofaktor dari kolom tersebut adalah nol. Adapun ekspresi determinan dari La place adalah:

$$|A| = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} + a_{53}C_{53}$$
$$|A| = 0.C_{13} + 0.C_{23} + 0.C_{33} + 0.C_{43} + 0.C_{53}$$
$$|A| = 0$$

6.5. Sifat-sifat Dasar Determinan

Determinan mempunyai sifat-sifat dasar yang sangat penting. Dengan mengetahui sifat-sifat dasar dari determinan ini suatu matriks yang mempunyai penampilan yang kompleks bisa disederhanakan menjadi bentuk yang lebih "praktis". Selain itu, penggunaan sifat-sifat dasar ini akan mempermudah operasi dalam penyelesaian suatu sistem persamaan linier.

Sifat I

Transpose dari suatu matriks mempunyai determinan yang sama dengan determinan matriks aslinya.

Contoh 4.10:

Pertimbangkan kembali matriks pada (4.8.9) di atas. Kemudian jika diambil transpose-nya sehingga menjadi:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix};$$

Determinannya adalah:

$$|A^T| = ad - bc$$

Bandingkan hasil ini dengan hasil yang ada di (4.8.2)

Sifat II

Perpindahan suatu baris atau kolom dengan baris atau kolom lainnya akan mengubah tanda dari determinan.

Contoh 4.11:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} |A_1| &= \text{cb} - \text{ad} \\ &= -(\text{ad} - \text{bc}) \\ &= -|A| \end{aligned}$$

Matriks A_1 di atas merupakan transformasi dari matriks A di mana baris pertama pertama dipertukarkan dengan baris kedua. Determinan yang dihasilkan menunjukkan negatif dari determinan matriks A.

Contoh 4.12:

Perhatikanlah matriks di bawah A_2 di bawah ini merupakan transformasi dari matriks A di mana kolom ke-1 dipertukarkan dengan kolom ke-2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix};$$

Determinan yang dihasilkan adalah:

$$\begin{aligned} |A_2| &= bc - da \\ &= -(ad - bc) \\ &= -|A| \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk menjaga nilai determinan agar tidak berubah maka diperlukan faktorisasi dengan menempatkan tanda negatif di depan tanda determinan setelah melakukan operasi penukaran posisi baris atau kolom. Untuk mengetahui hal ini secara jelas berikut ini diberikan contoh-contoh sebagai ilustrasi.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \qquad (4.8.10.a)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = --\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} \qquad (4.8.10.b)$$

Lihatlah pada ekspresi (4.8.10.a) bahwa telah dilakukan operasi pemindahan posisi kolom kedua pada matriks tersebut dipindahkan menjadi kolom kesatu, demikian juga sebaliknya. Tanda negatif yang dipasang di depan tanda determinan di ruas kanan diperlukan untuk tetap mempertahankan agar nilai determinan tidak berubah.

Begitu pula pada ekspresi (4.8.10.b), ekspresi ini merupakan operasi lebih lanjut dari ekspresi determinan yang ada pada ruas kanan dari ekspresi (4.8.10.a), yaitu dengan menukar posisi baris kesatu dipindahkan menjadi baris kedua, dan sebaliknya. Sebagai akibatnya maka tanda negatif diperlukan lagi agar tetap tidak mengubah nilai determinan.

Sifat III

Pengalian salah satu baris atau kolom dari suatu matriks dengan bilangan tertentu, q, akan berakibat pada kenaikan pada besarnya determinan sebesar q kali.

Contoh 4.13:

Perhatikan kembali matriks A pada (4.8.10). Jika baris ke-2 dikalikan dengan q maka matriks tersebut akan menjadi:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ q & qd \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} |A_3| &= adq - bcq \\ &= q\,(ad - bc) \\ &= q\,|A| \end{aligned}$$

Contoh 4.14:

Perhatikan kembali matriks A pada (4.8.5). Jika kolom ke-2 dikalikan dengan q maka matriks tersebut akan menjadi:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & qb \\ c & qd \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} |A_4| &= adq - bcq \\ &= q(ad - bc) \\ &= q\,|A| \end{aligned}$$

Terkait dengan sifat dasar determinan yang ketiga ini, perlu diketahui bahwa kenaikan nilai determinan dalam kelipatan tertentu, q, tidak diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks tersebut dengan q namun hanya baris atau kolom tertentu saja. Sehingga prosedur standard yang harus ditempuh untuk mempertahankan nilai determinan tetap tidak berubah jika dilakukan operasi baris atau kolom adalah sebagai berikut.

(4.8.11.a)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} \frac{a}{3} & b \\ \frac{c}{3} & d \end{vmatrix} \qquad (4.8.11.b)$$

Lihatlah pada ekspresi (4.8.11.a) dan (4.8.11.b) terlihat bahwa telah terjadi faktorisasi sehingga muncul skalar 2 pada kasus (4.8.11.a) dan skalar 3 pada (4.8.11.b). Faktorisasi ini diperlukan untuk tetap menjaga agar nilai determinan tidak berubah ketika dilakukan operasi baris dengan cara membagi baris pertama dengan bilangan 2(dua) pada (4.8.11.a) dan membagi kolom pertama dengan bilangan 3 (tiga) pada (4.8.11.b). Pembaca juga akan bisa memperoleh jawaban yang sama ketika melihat ekspresi di bawah ini.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \frac{a}{6} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{3} & d \end{vmatrix} \qquad (4.8.11.c)$$

Sifat IV

Jika seluruh elemen yang ada pada suatu baris atau kolom, secara seragam, ditambah atau dikurangi dengan kelipatan tertentu dari elemen jodohnya yang berasal dari baris atau kolom yang lain maka operasi ini tidak akan mengubah nilai determinan.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+qc & b+qd \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (4.8.12.a)$$

$$\begin{vmatrix} a+qc & b+qd \\ c & d \end{vmatrix} = (ad+qcd)-(cb+cqd)$$

$$= ad - cb$$

Pada ekspresi (4.8.12.a) di atas terlihat bahwa telah terjadi transformasi yang dilakukan dengan cara menambah elemen-elemen pada baris kesatu dengan q kali elemen jodohnya dari baris kedua.

Pandanglah determinan berikut ini,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+qb & b \\ c+qd & d \end{vmatrix} \qquad (4.8.12.b)$$

Pada kasus di atas, elemen-elemen yang ada pada kolom pertama telah ditambah sebesar q kali elemen jodohnya dari kolom kedua sehingga nilai determinannya bisa dihitung sebagai berikut ini:

$$\begin{vmatrix} a+qb & b \\ c+qd & d \end{vmatrix} \begin{matrix} = (ad+qbd) - (cb+bqd) \\ = ad - cb \end{matrix}$$

Lihatlah, bahwa determinan yang ditemukan besarnya sama dengan nilai determinan dari matriks aslinya.

Berhati-hatilah dalam hal ini. Sifat determinan yang keempat ini tidak bisa dipahami sebagai berikut ini:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a+qc & b+sd \\ c & d \end{vmatrix}$$

Faktor pengali terhadap elemen-elemen yang ditambahkan pada baris/kolom yang lain harus seragam. Pada kasus (4.8.12.a) dan

(4.8.12.b) faktor pengali ini adalah seragam untuk seluruh elemen yang ada yaitu sebesar q.

Sifat V

Jika suatu baris atau kolom mempunyai elemen-elemen yang besarnya tepat sama dengan kelipatan tertentu dari baris atau kolom yang lain maka nilai determinannya adalah nol.

Contoh-contoh di bawah ini memberikan ilustrasi mengenai hal ini:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \delta a & \delta b \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.8.13.a)$$

$$\begin{vmatrix} b & \gamma b \\ d & \gamma d \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.8.13.b)$$

Pada kasus (4.8.13.a) determinan dari matriks yang ada ádalah nol. Hal ini disebabkan karena elemen-elemen yang ada pada baris kedua dari matriks tersebut besarnya tepat sebesar δ kali elemen-elemen baris kesatu. Demikian juga pada kasus (4.8.13.b), elemen-elemen pada kolom kedua besarnya tepat γ kali elemen-elemen jodohnya pada kolom kedua.

7. 7. Kombinasi linier

Kombinasi linier adalah ekspresi antara dua atau lebih vektor di mana satu vektor bisa diekspresikan secara tepat oleh vektor-vektor lainnya. Pada sifat determinan yang ke V di atas menunjukkan adanya kombinasi linier. Hal ini bisa dilihat melalui ekspresinya yaitu:

$$V_2 = \delta V_1 \qquad (4.9.1.)$$

di mana V_2 adalah baris kedua dan V_1 adalah baris kesatu dari matriks pada (4.9.1.). Begitu juga kombinasi linier bisa didapati berbentuk seperti ini:

$$U_2 = \delta U_1 \qquad (4.9.2)$$

di mana U_2 adalah kolom kedua dan U_1 adalah kolom kesatu dari matriks pada (4.9.2).

Ekspresi pada (4.9.1) dan (4.9.2) merupakan salah satu dari berbagai ekspresi dari kombinasi linier yang bisa muncul. Ekspresi-ekspresi yang lain di antaranya bisa dilihat pada berikut ini:

$$V_2 = V_1 + \delta V_3$$
$$U_3 = \gamma V_1 - \alpha V_3$$

Suatu matriks yang dibentuk oleh dua atau lebih vektor di mana terjadi kombinasi linier di antara mereka maka determinan matriks tersebut adalah nol. Matriks yang demikian disebut sebagai matriks yang *singular*. Dengan kata lain untuk mendeteksi singularitas dari suatu matriks maka perlu dilihat determinan dari matriks tersebut: jika determinannya adalah bukan nol maka matriks tersebut adalah tidak *singular* atau *non-singular*.

8. Inverse Matriks

Sebagaimana telah disebut di muka bahwasanya matriks, sebagaimana bilangan, bisa dilakukan operasi penambahan, pengurangan, perkalian tetapi tidak bisa dilakukan operasi pembagian. Namun demikian ada suatu operasi untuk matriks yang mirip dengan pembagian. Untuk melihat hal ini berikut ini diberikan diskusi mengenai hal ini.

Operasi pembagian biasa ditulis sebagai: $\frac{A}{B}$ yang menunjukkan bahwa bilangan A dibagi dengan bilangan B. Cara lain untuk mengekspresikan hal ini adalah dengan menulisnya menjadi ekspresi berikut ini:

$$A\frac{1}{B}$$

Terma yang ada di belakang pada ekspresi di atas merupakan balikan (inverse) dari B.

8.1. Sifat-sifat Inverse Matriks

Dengan mengikuti logika yang ada dalam bilangan, inverse dari suatu matriks bisa dipahami sebagaimana hal di atas. Inverse matriks disimbolkan sebagai A^{-1} yang mempunyai sifat sebagai berikut:

a. Matriks yang *singular* tidak mempunyai inverse

b. Inverse dari suatu matriks mempunyai dimensi yang sama dengan matriks asalnya

c. Inverse dari suatu matriks jika dikalikan dengan matriks asalnya akan sama dengan matriks identitas (*unity*).

$$AA^{-1} = I$$

d. Hukum komutatif perkalian berlaku untuk kasus perkalian antara inverse suatu matriks dengan matriks asalnya:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

e. Inverse dari inverse suatu matriks adalah matriks asal

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Sifat pertama merupakan konsekuensi logis dari definisi mengenai inverse matriks yang muncul pada ekspresi (4.10.3) di mana balikan dari determinan berperan sebagai skalar pengali. Dengan demikian jika matriksnya singular, determinan sama dengan nol, maka skalar pengali tersebut menjadi tak terhingga. Oleh karenanya prosedur yang perlu ditempuh dalam usaha menemukan inverse dari matriks yang pertama sekali adalah menyelidiki terlebih dahulu apakah matriks tersebut *singular* atau tidak. Hal ini bisa dilakukan dengan menemukan nilai determinan yang tidak sama dengan nol.

Sifat kedua merupakan sesuatu yang logis karena inverse matriks disusun oleh elemen utama yaitu matriks kofaktor yang mana jumlah kofaktor tersebut selalu sama dengan elemen matriks asal.

Sifat ketiga di atas mengikuti sifat dari bilangan. Hal ini mengingat bahwa matriks I mempunyai sifat seperti bilangan satu. Padanan dari sifat kedua di atas pada kasus bilangan adalah:

$$B\frac{1}{B} = 1$$

Sifat keempat merupakan pengecualian dari sifat matriks di mana hukum komutatif perkalian tidak berlaku untuk perkalian matriks.

Sedangkan sifat kelima dari matriks mengikuti sifat dari bilangan yaitu:

$$\frac{1}{\frac{1}{B}} = B$$

8.2. Menemukan Inverse dari Matriks

Dengan mengikuti sifat-sifat di atas, maka jika ada suatu matrik P dan kemudian ditemukan matriks yang lain, Q, sehingga PQ adalah I maka bisa dikatakan bahwa Q adalah inverse dari P. Untuk memberi ilustrasi mengenai hal ini berikut ini diberikan contoh.

Pandanglah matriks berikut ini:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (4.10.1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \qquad (4.10.2)$$

Sekarang carilah hasil kali P dan Q:

$$PQ = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{2}{6}+\frac{12}{9}\right) & \left(\frac{4}{6}-\frac{6}{9}\right) \\ \left(-\frac{4}{6}+\frac{6}{9}\right) & \left(\frac{8}{6}-\frac{3}{9}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{18}{54}+\frac{72}{54}\right) & \left(\frac{36}{54}-\frac{36}{54}\right) \\ \left(-\frac{36}{54}+\frac{36}{54}\right) & \left(\frac{72}{54}-\frac{18}{54}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{54}{54} & \frac{0}{54} \\ \frac{0}{54} & \frac{54}{54} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa hasil akhir perkalian antara kedua matriks di atas adalah matriks identitas. Dengan demikian maka:

$$Q = P^{-1}$$

Pembahasan berikut ini akan memfokuskan pada prosedur untuk memperoleh inverse dari suatu matriks. Pada dasarnya inverse suatu matriks A bisa diekspresikan sebagai berikut ini:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[C_{ij}\right]^{T} \qquad (4.10.3)$$

Di mana $|A|$ adalah determinan dari matriks A: $\left[C_{ij}\right]$ adalah matriks yang mana elemen-elemennya adalah kofaktor ij dari matriks A.

Prosedur untuk menemukan inverse dari matriks adalah sebagai berikut:

a. Temukan determinan dari matriks tersebut
b. Temukan minor dan juga kofaktor untuk masing-masing elemen matriks
c. Susun kofaktor yang diperoleh dalam suatu matriks sesuai dengan posisi masing-masing. Sebagai misal kofaktor ij akan menduduki elemen ij pada matriks tersebut
d. Ambil transpose dari matriks kofaktor di atas
e. Perkalikan transpose matriks di atas dengan skalar yang merupakan balikan dari determinan matriks asal.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas, pandanglah kembali matriks model A yang ada pada ekspresi (4.8.6). Untuk memperoleh inverse dari matriks tersebut, langkah-langkah yang diambil adalah:

a. Determinan $|A|$ adalah (ad – cb)
b. Menemukan kofaktor yang dalam hal ini sudah ditemukan di depan yaitu:

$$C_{11} = d;\ C_{12} = -c;\ C_{21} = -b;\ C_{22} = a$$

c. Matriks kofaktor adalah:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

d. Transpose dari matriks kofaktor di atas adalah:

$$(C_{ij})^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

e. Inverse dari matriks tersebut adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{(d\ -b\ )}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (4.10.4)$$

<u>Contoh 4.1.5</u>:

Lihatlah kembali matriks yang ada dalam ekspresi (4.10.1). Inverse dari matriks tersebut bisa secara langsung diperoleh dengan menggunakan ekspresi (4.10.4), yaitu:

$$A^{-1} = \frac{1}{(6-24)}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{18} & \frac{6}{18} \\ \frac{4}{18} & -\frac{2}{18} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Pandang dan bandingkanlah hasil akhir yang diperoleh di atas dengan matriks Q yang ada dalam ekspresi (4.10.2). Ternyata hasil akhir yang diperoleh dan matriks Q yang ada pada ekspresi (4.10.2). adalah tepat sama.

Contoh 4.1.6:

Pandanglah kembali matriks A di bawah ini yang berasal dari ekspresi (4.8.4).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.8.4)$$

Untuk menemukan inverse dari matriks A di atas prosedur yang perlu diambil adalah:

a. Menemukan determinan yang dalam hal ini sudah ditemukan di depan yaitu sebesar -88

b. Menemukan kofaktor, yang juga telah diperoleh di depan

c. Menyusun matriks kofaktor:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -13 \\ 32 & -24 & 12 \\ -40 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

d. Menyusun transpose dari matriks kofaktor:

$$(C_{ij})^T = \begin{bmatrix} 2 & 32 & -40 \\ 4 & -24 & 8 \\ -13 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya inverse dari matriks A bisa diperoleh dengan mengikuti aturan yang ditentukan pada ekspresi (4.10.3), yaitu:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{0}{8} \\ -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} & -\frac{8}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{4}{8} \end{bmatrix}$$

8.3. Pengecualian Sifat Inverse Matriks

Sebagaimana pada pemaparan pada seksi 10.1 yang mengatakan bahwa matriks mempunyai sifat yang sama dengan bilangan yaitu bahwa:

$$A\frac{1}{A} = 1$$

Padanan matriksnya adalah:

$$AA^{-1} = I$$

Kebenaran dari hal tersebut sudah didiskusikan pada seksi 10.2. di atas Namun demikian perlu diingat bahwa untuk memperoleh hasil yang berupa matriks identitas (I) maka seseorang tidak selalu mengalikan suatu matriks dengan inversenya. Untuk melihat hal ini lihatlah kedua matriks berikut ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika kedua matriks **A** dan **B** di atas dikalikan maka akan menghasilkan matriks berikut ini:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lihat juga matriks di bawah ini,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika matriks C di atas dikuadratkan maka

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}*\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lihatlah hasil-hasil yang diperoleh dari perkalian matriks-matriks di atas. Ternyata, hasil kalinya berupa matriks identitas. Dengan demikian, matriks identitas tidak saja bisa dibentuk melalui perkalian antara suatu matriks dengan inversenya.

9. Transformasi Matriks

Matriks bisa ditransformasikan menjadi berbagai bentuk sesuai dengan tujuan yang diinginkan. Transformasi ini sebagaimana yang terjadi juga pada suatu persamaan bisa dilakukan dan dibenarkan karena tidak mengubah nilai yang ada. Adapun tujuan dari transformasi ini menyesuaikan keinginan pihak yang melakukan analisis. Namun secara umum, transformasi ini akan banyak membantu menyelesaikan berbagai permasalahan dalam area aljabar linier.

9.1. Prosedur dan Teknik Transformasi

Transformasi ini tentu saja tidak boleh mengubah nilai dari determinan dari matriks yang bersangkutan. Untuk itu transformasi yang dilakukan harus berdasar pada sifat-sifat dasar determinan yang dipaparkan pada bagian 8.5. di atas.

Untuk melakukan transformasi beberapa langkah yang menjadi prosedur standard perlu ditempuh, yaitu:

a. Tentukan obyek transformasi: baris atau kolom mana yang akan diubah
b. Tentukan basis transformasi: baris atau kolom mana yang akan digunakan sebagai dasar untuk mengubah obyek transformasi
c. Tentukan operator transformasi: bilangan tertentu yang akan menjadi kelipatan dari basis transformasi
d. Pengubah, yaitu hasil operasi yang berupa perkalian atau pembagian atas elemen basis transformasi dengan operator transformasi
e. Menemukan hasil akhir transformasi yaitu dengan menambah atau mengurangi obyek transformasi dengan pengubah.

<u>Contoh 4.1.7:</u>

Ambil lagi matriks P dari (4.10.1). Matriks tersebut bisa transformasikan dalam bentuk lain tanpa mengubah nilai determinan, menjadi:

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriks P_2 merupakan transformasi dari matriks awal, P.

Untuk memberi tengara pada matriks P yang lama dari matriks P yang baru di sini nama masing-masing matriks akan diberi *subscript*. Matriks P yang lama akan diberi *subscript* menjadi P_1 dan matriks P yang baru diberi *subscript* menjadi P_2.

Untuk mengetahui proses keseluruhan dari transformasi ini perlu ditempuh langkah-langkah sebagaimana disebut di atas.

Prosedur dan langkah transformasi.

a. Penentuan obyek transformasi. Dalam hal ini obyek transformasi adalah baris kesatu.

b. Penentuan basis transformasi. Dalam hal ini basis transformasi adalah baris kedua.

c. Penentuan operator transformasi. Dalam kasus ini operator transformasi adalah bilangan 2 (dua).

d. Menemukan pengubah yang akan mengubah obyek transformasi, baris kesatu, dengan cara mengalikan operator transformasi (bilangan 2) dengan basis transformasi:

$$2(4 \quad 3)$$
$$= 8 \quad 6$$

e. Menemukan hasil akhir transformasi:

Obyek transformasi (baris kesatu):		2	6
Pengubah	:	8	6+
Hasil transformasi	:	10	12

Dengan demikian obyek transformasi, baris kesatu, telah berubah menjadi:

$$10 \qquad 12$$

Oleh karenanya matriks P yang baru P_2 telah berubah menjadi:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (4.11.1)$$

Lihatlah pada matriks P_2 di atas di mana baris kedua yang tidak merupakan obyek atau target transformasi tetap tidak berubah. Bisa dibandingkan bahwa:

$$|P_1| = |P_2| = -18$$

Berikut ini diberikan ringkasan dari proses transformasi di atas:

$$\begin{array}{rr} 2 & 6 \\ 2\text{x}(4 & 3) \\ \underline{8} & \underline{6}\,+ \\ 10 & 12 \end{array}$$

Contoh 4.1.8:

Matriks hasil transformasi di atas (4.8.5) selanjutnya bisa ditransformasi lagi. Transformasi yang akan di lakukan di sini adalah dengan mengubah kolom kedua dengan cara mengurangi kolom kedua dengan tiga kali elemen padanannya pada kolom pertama.

Prosedurnya adalah:

a. Menentukan obyek transformasi, yaitu kolom kedua
b. Menentukan basis transformasi, yaitu kolom kesatu
c. Menentukan operator transformasi, yaitu bilangan 3 (tiga)
d. Menemukan pengubah, yaitu:

$$3\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

e. Menemukan hasil transformasi:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks P_2 berubah menjadi:

$$P_3 = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|P_3| = -18$$

Sebagai perbandingan bisa dilihat bahwa:

$$|P_1| = |P_2| = |P_3| = -18$$

Secara ringkas langkah-langkah di atas bisa ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 4 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Selain itu, transformasi sebagaimana dilakukan di atas juga bisa dilakukan secara bersamaan selama setiap elemen yang ada pada basis transformasi (kolom/baris) adalah tetap.

<u>Contoh 4.1.9:</u>

$$G_1 = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 8 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.11.2)$$

Sekarang, lihat matriks G di atas. Jika baris kedua dan baris ketiga ditransformasikan secara bersamaan dengan cara menambah setiap elemen yang ada pada kedua baris tersebut dengan dua kali elemen-elemen yang menjadi padanannya di baris pertama, menjadi:

Baris I:	4	20	8		4	20	8
	2(4	20 +	8)				
Baris II:	8	5	11	=	16	45	27
	2 (4	20 +	8)				
Baris III:	0	0	0		8	40	16

Sehingga matriks tersebut berubah menjadi:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 8 \\ 16 & 45 & 27 \\ 8 & 40 & 16 \end{bmatrix}$$

Transformasi yang sama juga bisa dilakukan terhadap matriks G dengan menentukan kolom kedua sebagai basis. Kolom kesatu ditransformasi dengan cara menambahkan pada masing-masing elemen yang ada dengan tiga kali kolom kedua. Adapun kolom ketiga ditransformasi dengan cara mengurangi masing-masing elemen yang ada dengan lima kali kolom kedua, sehingga menjadi:

$$G_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 8+3 \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 20 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 11-5 \\ 0 \end{matrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & \begin{pmatrix} 60 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} & 20 & 8 & \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 8+ & & 5 & 11- & \\ 0 & & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 64 & 20 & -92 \\ 23 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pembaca bisa memeriksa bahwa:

$$|G_1| = |G_2| = |G_3| = 0$$

Poin penting yang perlu diperhatikan di sini adalah bahwa dalam kedua kasus transformasi di atas, yang menyebabkan matriks G_1 menjadi G_2 dan juga G_3, setiap elemen yang ada pada basis transformasinya adalah tetap. Pada kasus G_2 baris kesatu tetap tidak berubah sedangkan baris kedua dan baris ketiga berubah semua. Demikian juga yang terjadi pada kasus G_3: kolom kedua, yang merupakan basis transformasi, tetap tidak berubah.

Perlu juga dimengerti bahwa transformasi matriks sebagai ditunjukkan di atas bisa juga dilakukan terhadap matriks yang tidak mempunyai bentuk bujur sangkar.

9.2. Transformasi dan Inverse

Salah satu kegunaan dari transformasi matriks di atas adalah bisa digunakan untuk menemukan inverse dari matriks. Ide dasar dari penggunaan transformasi ini bisa dilihat pada pemaparan berikut ini.

Ambillah suatu matriks **P**. Matriks **P** tersebut bisa berubah menjadi matriks **I** dengan dimensi yang sama hanya jika dia dikalikan dengan inversenya, $\mathbf{P}^{-1}$. Aksioma inilah yang dipakai dalam kasus ini.

Jika matriks **P** ditransformasikan menjadi matriks **I** dengan dimensi yang sama maka transformasi tersebut adalah setara dengan mengalikan matriks **P** dengan inversenya, $\mathbf{P}^{-1}$, karena:

$$\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{I} \qquad (4.11.3)$$

Sebaliknya, proses transformasi yang sama ini jika dilakukan terhadap **I**, dengan dimensi yang sama, maka akan menghasilkan matriks $\mathbf{P}^{-1}$, karena:

$$IP^{-1} = P^{-1} \qquad (4.11.4)$$

Lihatlah pada (4.11.3) dan (4.11.4) terlihat bahwa tranformasi pada keduanya adalah setara. Kesetaraan ini bisa dilihat dengan lebih jelas melalui diagram di bawah ini:

$$\underset{(a)}{P \overset{P^{-1}}{\Rightarrow} I} \qquad \underset{(b)}{I \overset{P^{-1}}{\Rightarrow} P^{-1}} \qquad (4.11.5)$$

Simbol panah ke kanan digunakan untuk menunjukkan proses transformasi yang terjadi. Sementara simbol inverse matriks, P^{-1} yang berada di atas tanda panah menunjukkan "materi" yang dimuatkan pada proses transformasi yang menentukan hasil akhir dari transformasi tersebut.

Proses transformasi yang digambarkan pada (4.11.5) pada panel (a) dan panel (b) dilakukan secara serempak dalam satu proses yang sama. Untuk menunjukkan hal ini, pemaparan berikut ini akan memberikan contoh numerik.

Untuk memulainya, matriks **P** pada panel (a) dan matriks **I** pada panel (b) dalam (4.11.5) perlu digabungkan dalam matriks gabungan (*augmented matrix*) sebelum dilakukan transformasi. Anggap lagi bahwa matriks **P** di sini adalah matriks P yang ada pada (4.10.1). Matriks gabungan antara **P** dan **I** tersebut adalah:

$$\mathbf{P\text{-}I} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (4.11.6)$$

Lihat pada matriks gabungan **P-I** di atas. Tanda garis tegak yang tepat berada di tengah menunjukkan pemisah antara matriks **P** dan matriks **I**. Tanda pemisah ini diperlukan untuk menengarai mana matriks yang berasal dari matriks **P** dan mana yang berasal dari matriks **I** sehingga akan memudahkan untuk memisahkan kembali antara keduanya jika diperlukan.

Sekarang, akan dilakukan transformasi pada matriks gabungan **P-I** dengan cara mengurangi elemen-elemen pada baris kesatu dengan 2(dua) kali elemen-elemen jodohnya yang ada pada baris kedua. Hal ini bisa dilihat sebagaimana berikut ini:

$$\mathbf{P\text{-}I} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2(4 & 3) & 2(0 & 1) \\ & & & \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ (8 & 6) & (0 & 2) \\ & & & \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Selanjutnya, transformasi masih terus dilakukan dengan cara menambah elemen-elemen yang ada pada baris kedua dengan $-\frac{4}{6}$ kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kesatu, sehingga menjadi:

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & -2 \\ \left(\frac{4}{6}\right)(-6) & \left(\frac{4}{6}0\right) & \left(\frac{4}{6}1\right) & \left(\frac{4}{6}\right)(-2) \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & -2 \\ (-4 & 0) & (\frac{4}{6} & \frac{-8}{6}) \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{array}\right]$$

Hasil transformasi di atas bisa difaktorkan berdasar sifat dasar determinan III yang dicontohkan oleh ekspresi (4.8.11.a). Dalam faktorisasi ini baris kesatu dibagi dengan -6 sehingga kemudian harus muncul bilangan -6 di depan tanda matriks sebagai penyeimbang agar nilai detrminan tetap tidak berubah. Hal ini adalah:

$$= (-6) \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 3 & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{array}\right]$$

Selanjutnya ekspresi matriks di atas akan difaktorkan lagi dengan membagi baris kedua dengan bilangan 3 (tiga) sehingga harus muncul bilangan 3 (tiga) di depan tanda matriks sebagai berikut ini:

$$= (3)(-6)\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{array}\right]$$

Amatilah matriks gabungan hasil transformasi di atas. Matriks yang ada pada bagian kiri dari tanda pemisah telah sepenuhnya berubah menjadi matriks identitas (I). Hal ini adalah merupakan akhir dari "perjalanan" transformasi karena transformasi memang ditujukan untuk mengubah matriks asal menjadi matriks identitas sebagaimana didiktekan pada (4.11.5). Karena proses keseluruhan transformasi sudah selesai maka matriks gabungan hasil akhir transformasi di atas perlu dipisahkan kembali menjadi:

$$\underset{(a)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{(b)}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}} \qquad (4.11.7)$$

Lihatlah matriks-matriks hasil akhir transformasi di atas (4.11.7) dan bandingkan dengan matriks gabungan yang ada pada (4.11.6). Terlihat di sana bahwa matriks aslinya adalah **P** pada (4.11.6) kemudian berubah menjadi matriks identitas (**I**) pada (4.11.7). Sebaliknya, matriks yang aslinya adalah matriks identitas (**I**) pada (4.11.6) berubah menjadi suatu matriks yang bukan identitas pada (4.11.7). Hal ini sepenuhnya menunjukkan proses yang ditunjukkan oleh panel (a) dan panel (b) pada (4.11.5). Dengan demikian matriks yang ada pada panel (b) pada (4.11.7) adalah hasil transformasi yang ditunjukkan oleh panel (b) pada (4.11.5) yang tidak lain adalah merupakan inverse dari matriks **P**. Untuk itu bandingkan matriks tersebut dengan matriks **Q** yang ada pada (4.10.2). Ternyata keduanya adalah tepat sama yang berarti bahwa matriks hasil transformasi terakhir yang ada pada panel (b) (4.11.7) adalah benar-benar merupakan inverse dari matriks **P**, $\mathbf{P}^{-1}$.

9.3. Strategi Transformasi

Transformasi yang dilakukan di atas secara umum bertujuan untuk mengubah matriks yang akan dicari inversenya menjadi matriks identitas (I). Namun begitu, menemukan operator transformasi (bilangan kelipatan yang akan digunakan sebagai pengali dari basis transformasi) adalah suatu pekerjaan yang tidak terlalu mudah. Sebagai misal, mengapa pada transformasi pertama dipilih bilangan 3 dan pada transformasi kedua dipilih bilangan $\frac{4}{6}$ sebagai operator dan bukannya bilangan yang lain? Hal ini merupakan bagian dari strategi yang ditempuh untuk mengubah matriks awal mejadi matriks identitas. Untuk lebih memperjelas hal ini berikut ini akan disajikan prosedur yang perlu ditempuh.

Prosedur Menentukan Strategi

a. Identifikasi semua elemen-elemen di luar diagonal

Identifikasikan elemen-elemen yang ada pada dan di luar diagonal. Elemen-elemen tersebut akan menjadi target transformasi. Dalam transformasi ini elemen-elemen tersebut perlu diubah nilainya agar menjadi nol. Hal ini mengingat bahwa pada matriks identitas (I), elemen diagonalnya adalah 1 (satu) dan elemen-elemen lainya adalah nol. Berikut ini ditunjukkan mana-mana elemen yang perlu diubah menjadi nol dan mana yang perlu diubah menjadi 1 (satu). Gambaran berikut ini akan memberikan kejelasan.

Matriks 2 x 2 :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.11.8)$$

Pada ekspresi di atas, tanda panah ke kanan digunakan untuk menunjukkan proses transformasi. Dengan demikian ekspresi di atas menunjukkan bahwa matriks yang ada di sebelah kiri perlu ditransformasikan menjadi matriks di sebelah kanan, yaitu matriks identitas.

Dengan melihat ekspresi pada (4.11.8) di atas, maka akan bisa ditentukan target transformasinya sebagai berikut.

$$\underset{(a)}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}; \qquad \underset{(b)}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad (4.11.9)$$

Matriks 3 x 3 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3.5 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.11.10)$$

Dengan demikian target transformasinya bisa ditentukan yaitu:

$$\underset{(a)}{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}; \underset{(b)}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}; \quad \underset{(c)}{\begin{bmatrix} 5 \\ 3.5 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}; \quad (4.11.11)$$

b. Identifikasi baris mana yang akan dipilih menjadi basis transformasi.

Perlu diingat bahwa pada baris yang akan dipilih, elemen yang tepat berada pada diagonal, yang kemudian disebut sebagai elemen kunci, perlu diubah menjadi 1 (satu) sebagaimana ditunjukkan pada (4.11.9) sampai dengan (4.11.11). Karena elemen kunci, pada matriks asal, nilainya tidak mesti menunjukkan angka 1 (satu) maka perlu dilakukan faktorisasi atas baris tersebut dengan cara membagi semua elemen dari baris yang dipilih dengan elemen kunci. Dengan demikian elemen kunci akan berubah nilainya menjadi 1(satu).

Pada tahap ini masalah kesederhanaan menjadi pertimbangan terpenting dalam arti bahwa faktorisasi harus menghasilkan bilangan-bilangan yang paling sederhana. Untuk itu strategi yang perlu diambil untuk hal ini adalah dengan memilih baris mana yang menghasilkan bilangan-bilangan yang paling sederhana jika faktorisasi dilakukan. Sebagai ilustrasi pandanglah hasil-hasil faktorisasi pada masing-masing baris untuk nantinya bisa dipertimbangkan.

Faktorisasi pada baris kesatu:

$$4\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Faktorisasi pada baris kedua:

$$3\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{3.5}{3} \end{bmatrix}$$

Faktorisasi pada baris ketiga:

$$8\begin{bmatrix} \frac{6}{8} & \frac{4}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

Dari ketiga alternatif faktorisasi di atas baris kesatu terlihat menghasilkan angka yang paling sederhana. Untuk itu pilihan baris yang akan menjadi target faktorisasi yang nantinya sekaligus berperan sebagai basis transformasi adalah baris kesatu. Untuk itu hasil faktorisasi adalah sebagai berikut ini:

$$4\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 2 & 3 & 3.5 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Lihat pada matriks di atas. Elemen-elemen pada baris kedua dan ketiga tidak berubah karena mereka tidak terpilih sebagai target faktorisasi.

c. Identifikasi baris yang akan menjadi target transformasi.

Dengan melihat kembali ekspresi pada (4.11.8) dan (4.11.11) maka kolom kesatu bentuknya harus diubah menjadi:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk matriks dengan dimensi 2 x 2

dan,

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ untuk matriks dengan dimensi 3 x 3

Untuk itu baris kedua dan juga baris ketiga (pada matriks 3x3) pada kolom tersebut perlu diubah menjadi nol.

d. Melakukan transformasi baris

Untuk melakukan transformasi perlu mengacu pada ekspresi (4.11.11) panel (a). Untuk menghindari komplikasi, transformasi dilakukan secara bertahap. Untuk yang pertama kali, transformasi dilakukan terhadap baris kedua. Target dari transformasi ini adalah menjadikan elemen pada baris kedua kolom kesatu menjadi nol. Basis transformasi telah ditentukan sebelumnya yaitu baris kesatu dengan elemen kunci angkanya adalah 1 (satu). Karena elemen target transformasi, baris kedua pada kolom kesatu, nilainya adalah 2 maka elemen-elemen pada baris kedua perlu dikurangi dengan 2 (dua) kali elemen-elemen padanannya pada baris kesatu. Jika para pembaca mengalami kesulitan dalam mengikuti hal ini maka disarankan untuk melihat kembali prosedur dan teknik transformasi yang secara detil telah dipaparkan pada bagian 11.1. sebelum ini. Hasil transformasinya adalah:

$$4\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Lihat, elemen target yaitu baris kedua kolom kesatu sekarang nilainya telah berubah menjadi nol.

Target selanjutnya adalah mengubah elemen pada baris ketiga kolom kesatu menjadi nol. Karena elemen target transformasi, baris ketiga kolom kesatu, nilainya adalah 6 (enam) maka transformasi perlu dilakukan dengan mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris ketiga dengan kelipatan 6 (enam) dari elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kesatu sehingga menjadi:

$$4\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Lihat sekarang, kolom pertama pada matriks di atas sudah mempunyai bentuk yang seperti diharapkan sebagaimana pada ekspresi (4.11.11) panel (a).

Giliran selanjutnya adalah melakukan transformasi elemen-elemen yang ada pada kolom kedua pada matriks yang baru saja ditransformasikan di atas dengan menggunakan baris kedua sebagai basis transformasi. Pada tahap pertama transformasi dilakukan terhadap baris pertama dulu. Dengan mengacu pada ekspresi (4.11.11) panel (b) sebagai patokan, maka elemen kunci yang berperan sebagai basis transformasi adalah elemen di baris kedua kolom kedua. Elemen kunci ini ternyata sudah berbentuk bilangan 1 (satu) sehingga tidak diperlukan lagi faktorisasi atas baris tersebut.

Karena target transformasi, elemen di baris kesatu kolom kedua, adalah sebuah bilangan pecah: $\frac{1}{2}$, maka transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kesatu sebesar $\frac{1}{2}$ kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kedua sehingga hasilnya adalah:

$$4\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Giliran transformasi selanjutnya adalah baris ketiga pada ekspresi matriks yang paling akhir di atas. Baris maupun elemen yang digunakan sebagai basis transformasi kali ini tetap yaitu baris kedua dan elemen kuncinya adalah elemen pada baris kedua dan kolom kedua. Karena mengingat bahwa elemen target transformasi adalah elemen yang terdapat pada baris ketiga kolom kedua yang dalam hal ini besarnya adalah 1 (satu), maka transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris ketiga sebesar 1 (satu) kali elemen-elemen padanannya pada baris kuda sehingga hasilnya adalah:

$$4\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sekarang pandanglah matriks hasil transformasi yang paling akhir di atas. Formasi dari angka-angka yang ada pada kolom kedua ternyata sudah tepat sama dengan yang diharapkan sebagaimana pada ekspresi (4.11.11) panel (b).

Tahap selanjutnya adalah meneruskan transformasi dengan giliran kolom ketiga. Transformasi pada tahap ini menggunakan baris ketiga sebagai basis. Adapun elemen kuncinya yaitu elemen yang ada pada baris ketiga dan kolom ketiga. Mengingat elemen kuncinya bukan angka 1 (satu) maka dia harus diubah terlebih dahulu hingga menjadi 1 (satu). Hal ini bisa dilakukan dengan faktorisasi baris ketiga dengan cara membagi semua elemen yang ada pada baris tersebut dengan $-\frac{1}{2}$ sehingga menjadi:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)4\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan transformasi. Target pertama pada kesempatan ini adalah baris kedua terutama adalah elemen pada baris kedua dan kolom ketiga. Mengingat bahwa elemen pada baris kedua dan kolom ketiga ini besarnya sudah 1 (satu) maka transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kedua sebesar 1 (satu) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris ketiga sehingga menjadi:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)4\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Giliran selanjutnya adalah baris kesatu. Target utama transformasi pada kesempatan ini adalah elemen yang ada pada baris kesatu kolom ketiga. Mengingat bahwa elemen tersebut besarnya adalah $\frac{3}{4}$ maka transformasi dilakukan dengan mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kesatu sebesar $\frac{3}{4}$ kali baris ketiga yang kemudian menjadi:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lihatlah sekarang bahwa setiap kolom yang ada pada matriks hasil transformasi terakhir di atas mempunyai formasi tepat sesuai dengan yang diharapkan sebagaimana pada ekspresi (4.11.11) pada ketiga panel (a), (b) dan (c). Pembaca juga bisa memeriksa matriks hasil transformasi terakhir di atas. Terlihat bahwa matriks tersebut telah sepenuhnya berubah menjadi matriks identitas dengan dimensi 3 x 3 sebagaimana ditunjukkan oleh (4.11.10).

9.4. Pemodelan dengan Matriks

Seringkali ditemui bahwa ekspresi model dalam bentuk matriks dianggap masih merupakan ekspresi yang panjang. Untuk itu terdapat adanya usaha untuk membuat ekspresi ini menjadi lebih kompak lagi. Untuk menyajikan ilustrasi mengenai hal ini pertimbangkanlah sistem persamaan berikut ini:

$$
\begin{aligned}
d_{11}X_1 + d_{12}X_2 + d_{13}X_3 + \ldots\ldots + d_{1n}X_n &= K_1 \\
d_{21}X_1 + d_{22}X_2 + d_{23}X_3 + \ldots\ldots + d_{2n}X_n &= K_2 \\
d_{31}X_1 + d_{32}X_2 + d_{33}X_3 + \ldots\ldots + d_{3n}X_n &= K_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= . \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= . \\
d_{m1}X_1 + d_{m2}X_2 + d_{m3}X_3 + \ldots\ldots + d_{mn}X_n &= K_m .
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan di atas bisa ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix}
d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots\ldots & d_{1n} \\
d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots\ldots & d_{2n} \\
d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots\ldots & d_{3n} \\
\ldots\ldots & & & & \\
\ldots\ldots & & & & \\
d_{m1} & d_{m2} & d_{m3} & \ldots\ldots & d_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ .X_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ . \\ . \\ .K_m \end{bmatrix}
$$

Pada ekspresi matriks di atas terlihat bahwa matriks utama **D** mengacu pada matriks **D** yang telah dituliskan sebelumnya pada persamaan (4.2.5.). Pada pembahasan kali ini ingin disampaikan suatu pemodelan dengan matriks dengan ekspresi yang kompak. Dalam hal ini sistem matriks di atas dituliskan sebagai:

$$\mathbf{DX} = \mathbf{K}$$

Biasanya dalam kasus seperti ini selalu disebutkan bahwa ekpresi di atas merupakan suatu sistem persamaan. Dengan disebutkan secara demikian maka pembaca sudah harus tahu sendiri mana yang berperan sebagai matriks utama, vector variabel dan vector konstan. Dalam hal ini **D** adalah matriks utama adapun **X** dan **K** adalah vector variabel dan vector konstan. Begitu juga dalam hal dimensi dari matriks utama, vector variabel dan vector konstan, mereka sudah otomatis menyesuaikan sedemikian rupa sehingga sistem di atas bisa dianggap sebagai suatu sistem persamaan, walaupun hal itu tidak dinyatakan secara eksplisit. Dengan demikian maka ketika memandang suatu sistem persamaan di atas: **DX = K**, maka pembaca harus sudah mengasumsikan bahwa dimensi dari matriks dan vektor-vetor di atas adalah:

D berdimensi mxn

X berdimensi nx1, dan

K berdimensi mx1

V

Sistem Persamaan Linier untuk Pemodelan

1. MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Sistem persamaan linier sebagaimana didiskusikan pada Bab IV di depan bisa didekati dengan matriks untuk penyelesaiannya. Bahkan pendekatan matriks ini mempunyai keunggulan dibandingkan dengan pendekatan eliminasi seperti yang dipaparkan di Bab sebelumnya. Pendekatan eliminasi sudah tidak bisa, atau kalau bisa akan menjadi sangat kompleks, untuk digunakan untuk mencari solusi bagi sistem persamaan linier yang terdiri dari 4 (empat) variabel dalam 4 (empat) persamaan.

Ekspresi dari sistem persamaan linier adalah sebagaimana berikut.

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}X_n = d_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}X_n = d_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}X_n = d_3 \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad . \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_n = d_m \end{array} \qquad (5.1.1)$$

Ekspresi di atas bisa digantikan dengan ekspresi matriks tanpa mengurangi maknanya, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ d_m \end{bmatrix} \qquad (5.1.2)$$

Pembaca bisa memeriksa bahwa ekspresi matriks pada (5.1.2) adalah sama dengan ekspresi persamaan pada (5.1.1). Hal ini bisa dilakukan dengan mudah jika terma pertama dan terma kedua pada ruas kiri dari ekspresi (5.1.2) dikalikan.

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}\ \underset{(n\times 1)}{\mathbf{X}} = \underset{(m\times 1)}{\mathbf{d}} \qquad (5.1.3)$$

Ekspresi pada (5.1.3) di atas merupakan penyimbolan yang kompak padat dari ekspresi (5.1.2) di mana matriks $\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}$ adalah terma pertama pada ruas kiri yang merupakan matriks koefisien. Disebut demikian karena elemen-elemen yang ada di dalamnya adalah merupakan koefisien dari variabel X. Sementara vektor kolom $\underset{(n\times 1)}{\mathbf{X}}$ adalah terma kedua dari ruas kiri yang merupakan vektor variable. Disebut vektor variabel karena elemen-elemen yang ada padanya adalah variabel-variabel penentu sistem persamaan. Adapun vektor $\underset{(m\times 1)}{\mathbf{d}}$ adalah vektor konstanta yang isinya adalah elemen-elemen yang merupakan bilangan konstan.

Setelah bentuk persamaan sebagaimana diekspresikan pada (5.1.1) diubah menjadi bentuk matriks, maka semua aturan-aturan tentang matriks berlaku pada matriks yang baru terbentuk ini.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas mengenai penggunaan ekspresi matriks untuk sistem persamaan linier berikut ini diberikan berbagai contoh.

Contoh 5.1.10

Ubahlah bentuk sistem persamaan berikut ini menjadi ekspresi matriks.

a.
$$\begin{gathered} 2X_1 + 3X_2 = 16 \\ 6X_1 + X_2 = 4 \end{gathered}$$

b.
$$\begin{gathered} X_1 = 2X_2 \\ 3X_1 + 4X_2 = 20 \end{gathered}$$

C.
$$\begin{gathered} 5X_1 + 7X_2 = 19 \\ 8X_2 = 12 \\ X_1 + 4X_2 + 3\,X_3 = 21 \end{gathered}$$

Penyelesaian:

a.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b. Perhatikan bahwa pada kasus ini ekspresi persamaan pertama tidak merupakan bentuk standar sebagaimana dimodelkan pada (5.1.1). Untuk itu perlu dilakukan modifikasi terlebih dahulu pada persamaan ini sehingga bentuknya sesuai dengan ekspresi (5.1.1), yaitu:

$$\begin{gathered} X_1 - 2X_2 = 0 \\ 3X_1 + 4X_2 = 20 \end{gathered}$$

Sehingga ekspresi matriksnya menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

c. Sistem persamaan yang akan diubah ekspresinya menjadi bentuk matriks terdiri dari 3 (tiga) variable dalam 3 (tiga) persamaan. Namun dalam dua persamaan pertama variable ketiga, X_3, tidak hadir. Begitu juga pada persamaan kedua variable X_1 dan X_2 tidak muncul. Hal ini bisa membuat kebingungan. Untuk itu sekali lagi ekspresi sistem persamaan di atas perlu diubah dalam bentuk standard terlebih dahulu agar sesuai dengan ekspresi standarnya.

$$5X_1 + 7X_2 + 0X_3 = 19$$
$$0\,X_1 + 8X_2 + 0X_3 = 12$$
$$X_1 + 4X_2 + 3X_3 = 21$$

Lihatlah sekarang bahwa koefisien 0 (nol) muncul pada variable-variable yang dalam ekspresi asli persamaannya sebenarnya tidak ada. Pembaca bisa memeriksa bahwa ekspresi sistem persamaan yang dimodifikasi di atas tidak mengubah nilai dari sistem persamaan aslinya. Hal ini hanya digunakan untuk menjembatani agar bentuk dari sistem persamaan aslinya bisa menyesuaikan dengan ekspresi standar dengan tidak mengubah nilai dari sistem persamaan tersebut. Setelah bentuknya sesuai dengan ekspresi standard pada (5.1.1) maka kemudian bisa diubah menjadi ekspresi matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix}$$

1.1. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier: Metode Cramer

Dalam rangka mencari penyelesaian sistem persamaan dengan menggunakan metode Cramer pertama sekali pandang dan identifikasikan koefisien-koefisien dari masing-masing variable yang ada: X_1, X_2, X_3,.... X_n dalam sistem persamaan. Secara lebih spesifik, lihatlah ekspresi matriks model pada (5.1.2), matriks ini bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix} X_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix} X_3 + \ldots\ldots\ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} X_n = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

Selanjutnya dari matriks di atas bisa dibentuk matriks baru dengan cara mengganti vektor kolom pertama dengan vektor kolom **d**, sehingga menjadi:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m3} \end{bmatrix} X_3 + \ldots\ldots\ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} X_n \quad (5.1.5.a)$$

Dengan mengacu pada ekspresi (5.1.3) selanjutnya ekspresi di atas bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots\ldots\ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ d_m & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{-}1}\mathbf{X}_{\text{-}1} \quad (5.1.5.b)$$

di mana:

$$
\mathbf{A}_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{d}_2 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \mathbf{d}_m & \mathbf{a}_{m2} & \mathbf{a}_{m3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{mn} \end{bmatrix} ; \mathbf{X}_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya bisa dibentuk matriks baru yang lain dengan cara mengganti vektor kolom kedua dengan vektor kolom **d**, sehingga menjadi:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \mathbf{a}_{31} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} \mathbf{X}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{33} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m3} \end{bmatrix} \mathbf{X}_3 + \ldots\ldots\ldots + \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{a}_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} \mathbf{X}_n \qquad (5.1.6.a)
$$

Ekspresi matriks di atas bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{d}_2 & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & \ldots\ldots\ldots\ldots & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \mathbf{d}_m & \mathbf{a}_{m2} & \mathbf{a}_{m3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \mathbf{a}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\cdot 1}\mathbf{X}_{\cdot 1} \qquad (5.1.6.b)
$$

di mana:

$$\mathbf{A}_{\text{-}2} = \begin{bmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} & \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} & \dots\dots\dots\dots & a_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ & & & \dots\dots\dots\dots & \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & d_m & a_{m3} & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ 1 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama bisa dibentuk matriks berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} X_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ d_m \end{bmatrix} + \dots\dots\dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{bmatrix} X_n \qquad (5.1.7.a)$$

Ekspresi matriks di atas bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & d_2 & \dots\dots\dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & d_3 & \dots\dots\dots\dots & a_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ & & & \dots\dots\dots\dots & \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & d_m & \dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{-}3}\mathbf{X}_{\text{-}3} \quad (5.1.7.b)$$

di mana:

$$
\mathbf{A}_{-3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & d_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & d_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & d_m & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}
$$

Berikut ini adalah matriks lain yang diperoleh dengan prosedur yang sama.

$$
\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix} X_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m3} \end{bmatrix} X_3 + \ldots\ldots\ldots + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ d_m \end{bmatrix} \qquad (5.1.8.a)
$$

Ekspresi matriks di atas bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots\ldots & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots\ldots & d_3 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{-n}\mathbf{X}_{-n} \qquad (5.1.8.b)
$$

di mana:

$$A_{-n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots\dots & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots\dots\dots & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots\dots\dots\dots & d_3 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ & & & \dots\dots\dots\dots & \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots\dots\dots & d_m \end{bmatrix} ; X_{-n} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Anggap sekarang bahwa matriks yang diekspresikan pada (5.1.2) di atas disebut sebagai matriks A saja. Dengan definisi seperti ini maka penyelesaian sistem persamaan linier bisa diperoleh melalui:

$$X_i = \frac{|A_{-i}|}{|A|} \qquad (5.1.9)$$

di mana i = 1,2,3 ......, n.

Contoh 5.1.11

Carilah penyelesaian atas sistem persamaan linier yang ada pada contoh Contoh 5.1.10.

Penyelesaian:

a. Dari sistem persamaan yang ada sudah bisa tertulis adanya matriks A yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh penyelesaian atas sistem persamaan linier dengan menggunakan metode Cramer maka perlu dibentuk matriks-matriks baru seperti pada (5.1.6.b) sampai dengan (5.1.8.b), yaitu:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} ; A_{-2} = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai X_{-1}, maka digunakan formulasi yang diekspresikan pada (5.1.9) di atas, yaitu:

$$X_1 = \frac{|A_{-1}|}{|A|}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-16}$$

$$X_1 = -0.25$$

Untuk memeperoleh nilai X_2 melalui metode ini maka bisa ditempuh melalui jalan berikut ini:

$$X_2 = \frac{|A_{-2}|}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-88}{-16}$$

$$X_2 = 5.5$$

b. Mencari X_1 dan X_2 dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 20 & 4 \end{bmatrix}; \qquad A_{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Nilai X1 dan X2 bisa diperoleh melalui perhitungan berikut ini:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 20 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-80}{-2} \qquad = \frac{20}{10}$$

$$X_1 = 40 \qquad X_2 = 2$$

c. Mencari X_1 . X_2 dan X_3 dari:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \; A_{-1} = \begin{bmatrix} 19 & 7 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 21 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \; A_{-2} = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 1 & 21 & 3 \end{bmatrix}; \; A_{-3} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 19 \\ 0 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 21 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 7 & 0 \\ 12 & 8 & 0 \\ 21 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}} \qquad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 19 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 1 & 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}} \qquad X_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 19 \\ 0 & 8 & 12 \\ 1 & 4 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$X_1 = \frac{204}{40} \qquad X_2 = \frac{180}{40} \qquad X_3 = \frac{844}{40}$$

$$. X_1 = 5.1 \qquad X_2 = 4.5 \qquad X_3 = 21.1$$

1.2. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier: Metode Eliminasi Gauss

Berbeda dengan metode Cramer, metode eliminasi Gauss mendasarkan diri pada transformasi baris. Transformasi ini diarahkan untuk mengubah matriks yang ada menjadi matriks segitiga. Dalam hal ini ada dua pilihan untuk mengubah bentuk matriks: mengubah menjadi matriks segitiga atas ataupun mengubahnya menjadi matriks segitiga bawah.

Dalam melakukan penyelesaian sistem persamaan linier dengan metode eliminasi Gauss ini diperlukan prosedur-prosedur sebagai berikut ini.

1. Ubah sistem persamaan yang akan diselesaikan ke dalam bentuk matriks
2. Identifikasikan matriks A dan vektor d dalam kasus ini.
3. Susun matriks A dan vektor d ke dalam matriks gabungan A-d.
4. Lakukan transformasi untuk mengubah matriks yang ada menjadi matrik segi tiga atas atau matriks segi tiga bawah.
5. Pisahkan kembali matriks A dan vektor d dari matriks gabungan
6. Kembalikan bentuk matriks menjadi bentuk persamaan
7. Temukan penyelesaian dengan melakukan susbstitusi bertingkat

Karena inti dari keseluruhan proses ini adalah transformasi menjadi bentuk matriks segi tiga, maka di bawah ini akan dipaparkan diskusi mengenai perubahan bentuk/transformasi tersebut.

a. **Transformasi ke arah matriks segi tiga atas**

Matriks 2 x 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} x \\ c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

Lihat ekspresi vektor di atas. Pada vektor kolom kedua, $\mathbf{a}_2$, elemen pada baris pertama berubah dari b menjadi 0 (nol). Terlihat di sini bahwa elemen baris pertama pada vektor kolom tersebut menjadi target transformasi (yang harus diubah menjadi nol).

Di lain pihak pada vektor kolom kesatu, $\mathbf{a}_1$, elemen pada baris kesatu berubah dari a menjadi sebuah bilangan sebarang, x. Hal ini bukan berarti bahwa elemen tersebut menjadi target transformasi melainkan perubahan ini hanya merupakan konsekuensi dari transformasi yang dilakukan pada baris kesatu secara keseluruhan yang bertujuan untuk mengubah elemen pada baris kesatu kolom kedua agar menjadi nol.

Setelah transformasi dilakukan maka bentuk matriks yang baru (hasil transformasi) adalah:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

Lihatlah matriks pada A, sebagaimana diekspresikan di atas, sekarang telah berubah menjadi bentuk segi tiga atas.

<u>Matriks 3 x 3</u>

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} k \\ l \\ g \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ h \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$$

Setelah semua transformasi dilakukan, maka bentuk akhir dari matriks yang baru akan menjadi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ l & m & 0 \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Lihatlah pada matriks yang baru di atas, semua elemen di atas diagonal semuanya adalah 0 (nol) yang merupakan ciri pembentuk matriks segi tiga atas. Perubahan dari elemen-elemen a, d dan e, secara berturut-turut, menjadi k, l dan m adalah sebagai akibat dari proses transformasi yang dilakukan dalam rangka mengubah bentuk matriks tersebut menjadi bentuk matriks segi tiga atas.

b. Transformasi ke arah matriks segi tiga bawah

Matriks 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow a_2 = \begin{bmatrix} b \\ n \end{bmatrix}$$

Lihat ekspresi vektor di atas. Pada vektor kolom kesatu, a_1, elemen pada baris kedua berubah dari c menjadi 0 (nol). Terlihat di sini bahwa elemen baris kedua pada vektor kolom tersebut menjadi target transformasi (yang harus diubah menjadi nol).

Di lain pihak pada vektor kolom kesatu, a_2, elemen pada baris kedua berubah dari d menjadi sebuah bilangan sebarang, n. Hal ini bukan berarti bahwa elemen tersebut menjadi target transformasi melainkan perubahan ini hanya merupakan konsekuensi dari transformasi yang dilakukan pada baris kedua secara keseluruhan yang bertujuan untuk mengubah elemen pada baris kedua kolom kedua menjadi nol.

Setelah transformasi dilakukan maka bentuk matriks yang baru (hasil transformasi) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ & n \end{bmatrix}$$

Lihatlah sekarang matriks A telah berubah menjadi bentuk baru yang berupa matriks segi tiga bawah.

<u>Matriks 3 x 3</u>

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a \\ d \\ g \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ e \\ h \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} b \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} c \\ f \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} c \\ p \\ q \end{bmatrix}$$

Setelah semua transformasi dilakukan, maka bentuk akhir dari matriks yang baru akan menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & p \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

Lihatlah, matriks A sekarang setelah transformasi berubah menjadi suatu matriks dengan bentuk segi tiga bawah.

<u>Contoh 5.1.12.</u>

Selesaikanlah sistem persamaan linier berikut ini dengan metode eliminasi Gauss.

$$3X_1 + X_2 = 10$$
$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

Penyelesaian:

a. Sebelum mengenakan eliminasi Gauss terlebih dahulu sistem persamaan di atas diubah menjadi bentuk matriks, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b. Dengan demikian bisa diidentifikasi matriks-matriks berikut ini.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

c. Membentuk Matriks Gabungan

Matriks A dan vektor **d** harus secara bersama-sama ditransformasikan dengan proses yang sama. Untuk itu matriks A dan vektor **d** perlu disusun dalam sebuah matriks gabungan sebagai berikut.

$$\mathbf{A-d} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right]$$

d. Melakukan transformasi

$$\mathbf{A-d} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right]$$

Transformasi diarahkan untuk mengubah matriks A menjadi bentuk matriks segi tiga atas. Basis transformasi dalam hal ini adalah baris kedua dengan target tranformasi baris kesatu atau tepatnya adalah elemen yang ada pada baris kesatu dan kolom kedua.

Untuk itu elemen-elemen yang ada pada baris kesatu dikurangi dengan 0,25 kali elemen-elemen yang ada pada baris kedua, sehingga menjadi:

$$\mathbf{A-d} = \left[\begin{array}{cc|c} 2.5 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right]$$

e. Pemisahan matriks **A** dari vektor **d**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

f. Mengembalikan bentuk ke bentuk persamaan

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X_1} \\ \mathbf{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

atau,

$$2.5X_1 = 5$$
$$2X_1 + 4X_2 = 20$$

g. Menemukan Penyelesaian

Ambil persamaan pertama dalam sistem di atas, yaitu:

$$2.5X_1 = 5$$

Sehingga,

$$X_1 = 2$$

Selanjutnya nilai X_2 bisa diperoleh dengan cara mensubstitusikan X_1 yang telah diperoleh ke dalam persamaan kedua sebagai berikut ini:

$$
\begin{aligned}
2(2) + 4X_2 &= 20 \\
4 + 4X_2 &= 20 \\
4X_2 &= 16 \\
X_2 &= 4
\end{aligned}
$$

Penyelesaian di atas dilakukan dengan mentransformasikan matriks A menjadi bentuk matriks segi tiga atas. Sekarang, sekedar untuk memeriksa, akan dicoba untuk melakukan penyelesaian dengan cara mentransformasikan matriks A menjadi bentuk matriks segi tiga bawah.

Untuk tujuan ini ambillah lagi di sini matriks gabungan di atas

$$
\mathbf{A} - \mathbf{d} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right]
$$

Transformasi di sini dilakukan dengan memilih baris kesatu sebagai basis. Sedangkan target transformasinya adalah elemen yang ada pada baris kedua kolom kesatu. Untuk keperluan tersebut transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kedua dengan $\frac{2}{3}$ kali dari elemen-elemen padanannya di baris pertama, sehingga menjadi:

$$
\mathbf{A} - \mathbf{d} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 0 & 3\frac{1}{3} & \frac{40}{3} \end{array}\right]
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \ \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 10 \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ \frac{40}{3} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
3X_1 + X_2 &= 10 \\
3\frac{1}{3}X_2 &= \frac{40}{3}
\end{aligned}
$$

Penyelesaian bisa diperoleh melalui penyelesaian persamaan kedua di atas, yaitu:

$$3\frac{1}{3}X_2 = \frac{40}{3}$$
$$X_2 = 4$$

Nilai X_1 bisa diperoleh melalui susbstitusi hasil X_2 yang telah diperoleh di atas ke dalam persamaan pertama, sebagai berikut.

$$3X_1 + 4 = 10$$
$$3X_1 = 6$$
$$X_1 = 2$$

Lihatlah, hasil yang diperoleh dengan cara tersebut (mengubah matriks A menjadi bentuk matriks segi tiga bawah) ternyata tepat sama dengan hasil yang diperoleh sebelumnya ketika transformasi dilakukan dengan cara mengubah matriks A menjadi bentuk matriks segi tiga atas.

Contoh 5.1.13.

Selesaikanlah sistem persamaan linier berikut ini dengan metode eliminasi Gauss.

$$2X_1 + 6X_2 - X_3 = 14$$
$$X_1 + 8X_2 + 12X_3 = 32$$
$$5X_1 - X_2 + 10X_3 = 48$$

Penyelesaian:

a. Mengubah Sistem persamaan ke dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 8 & 12 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 48 \end{bmatrix}$$

b. Menyusun Matriks Gabungan

$$\mathbf{A - d} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 14 \\ 1 & 8 & 12 & 32 \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

c. Melakukan Transformasi

Tranformasi akan diarahkan untuk mengubah matriks A di atas menjadi bentuk matriks segi tiga atas.

Untuk keperluan transformasi dipilih baris kesatu sebagai basis dengan target elemen yang ada pada baris kedua dan kolom ketiga. Untuk itu elemen-elemen yang ada pada baris kedua perlu ditambah dengan 12 (duabelas) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kesatu, sehingga berubah menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -1 & 14 \\ 25 & 80 & 0 & 200 \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Transformasi selanjutnya adalah dengan mentarget elemen yang ada pada baris kesatu kolom ketiga. Transformasi ini akan menggunakan baris ketiga sebagai basis.

Untuk keperluan ini, transformasi dilakukan dengan menambah elemen-elemen yang ada pada baris kesatu dengan 0.1 kali elemen-elemen padanannya di baris ketiga, sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2.5 & 5.9 & 0 & 18.8 \\ 25 & 80 & 0 & 200 \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Transformasi seterusnya adalah dengan mentarget elemen yang ada pada baris kesatu kolom kedua dari matriks yang baru di atas. Transformasi ini akan menggunakan baris ketiga sebagai basis.

Untuk keperluan ini, transformasi dilakukan dengan menambah elemen-elemen yang ada pada baris kesatu dengan 5.9 kali elemen-elemen padanannya di baris ketiga,

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = \left[\begin{array}{ccc|c} 32 & 0 & 0 & 302 \\ 25 & 80 & 0 & 200 \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 25 & 80 & 0 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix} ; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 302 \\ 200 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 25 & 80 & 0 \\ 5 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 302 \\ 200 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$32X_1 = 302$$
$$25X_1 + 80X_2 = 200$$
$$5X_1 - X_2 + 10X_3 = 48$$

Penyelesaian dimulai dengan menyelesaikan X_1 dari persamaan kesatu, yaitu:

$$32X_1 = 302$$
$$X_1 = 9.4375$$

Selanjutnya nilai X_1 yang telah ditemukan di atas disubstitusikan kedalam persamaan kedua menjadi:

$$25(9.4375) + 80\,X_2 = 200$$
$$235.9375 + 80\,X_2 = 200$$
$$80\,X_2 = -35.9375$$
$$X_2 = -0.449219$$

Untuk memperoleh nilai X_3, nilai X_1 dan X_2 yang sudah diperoleh sebelumnya disubstitusikan ke dalam persamaan ketiga di atas, sehingga:

$$5(9.4375) - (-0.44922) + 10\,X_3 = 48$$
$$47.63672 + 10\,X_3 = 48$$
$$10\,X_3 = 0.363281$$
$$X_3 = 0.036328$$

1.3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier: Metode Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss sebagaimana dipaparkan di atas merupakan kombinasi dari pendekatan transformasi matrik dan aljabar tradisional: eliminasi. Alternatif lain dari metode ini adalah metode Gauss-Jordan. Metode ini sepenuhnya bertumpu pada transformasi matriks.

Kalau pada metode eliminasi Gauss transformasi diarahkan untuk mengubah bentuk matriks menjadi bentuk segi tiga atas atau segi tiga bawah, dalam metode Gauss-Jordan transformasi diarahkan untuk mengubah matriks asal menjadi sepenuhnya matriks identitas, I_n.

Adapun transformasi kearah matriks identitas ini sudah dipaparkan pada bagian 11.2. di atas.

Untuk melakukan transformasi ini langkah-langkah yang diperlukan adalah sama dengan yang ada pada metode eliminasi Gauss, hanya saja transformasi dalam metode ini diteruskan sampai ditemukan matriks identitas.

Agar bisa memberikan gambaran yang lebih jelas berikut ini diberikan ilustrasi sebagai contoh.

Contoh 5.1.14:

Ambil lagi contoh pada 2.1.12. ke sini dan selesaikan dengan metode Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

a. Identifikasi matriks **A** dan vektor **d**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

b. Menyususn Matriks gabungan A-d,

$$\mathbf{A - d} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right]$$

c. Melakukan transformasi

Agar transformasi bisa dilakukan dengan lebih mudah maka matriks gabungan di atas perlu difaktorkan terlebih dahulu pada baris kedua sehingga menjadi:

$$\mathbf{A - d} = 4\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 10 \\ 0.5 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Selanjutnya transformasi dilakukan dengan memilih baris kedua sebagai basis dan dengan elemen pada baris pertama kolom kedua sebagai target. Transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kedua sebesar 1 (satu) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kedua sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 4\left[\begin{array}{cc|c} 2.5 & 0 & 5 \\ 0.5 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Transformasi selanjutnya ditargetkan pada elemen pada baris kedua kolom pertama dengan baris pertama sebagai basis. Untuk itu transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kedua dengan $\frac{1}{5}$ kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris pertama sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 4\left[\begin{array}{cc|c} 2.5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Karena bentuk di atas belum berubah sepenuhnya menjadi matriks identitas, maka perlu dilakukan faktorisasi atas baris pertama dengan membagi seluruh elemen yang ada pada baris tersebut dengan 2.5 sehingga berubah menjadi:

d. Memisahkan kembali matriks **A** dari vektor **d**,

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 10\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lihatlah matriks **A** di atas, sekarang sudah berubah bentuk sepenuhnya menjadi matriks identitas. Begitu juga vektor **d** juga mengalami perubahan pada nilai dari elemen-elemen yang ada padanya.

e. Melengkapi bentuk matriks untuk menunjukkan sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

f. Menemukan penyelesaian

Penyelesaian bisa ditemukan jika ekspresi matriks di atas diubah kembali menjadi ekspresi persamaan sebagai berikut ini.

$$X_1 = 2$$
$$X_2 = 4$$

Lihatlah, setelah bentuk matriks diubah ke dalam bentuk persamaan maka secara langsung penyelesaian atas sistem persamaan linier tersebut bisa ditemukan. Dengan kata lain vektor d hasil transformasi terakhir adalah merupakan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut.

Amatilah, maka akan dengan jelas bisa diketahui perbedaan antara metode ini dan metode eliminasi Gauss. Metode tersebut sudah tidak memerlukan lagi substitusi bertingkat dari satu persamaan ke persamaan yang lain, melainkan meneruskan transformasi hingga menjadi bentuk matriks identitas.

Contoh 5.1.15:

Carilah penyelesaian atas sistem persamaan linier yang disebutkan pada contoh 5.1.13. dengan menggunakan metode Gauss-Jordan.

Untuk memulainya hadirkanlah lagi hasil transformasi terakhir dalam rangka penyelesaian sistem persamaan tersebut yang dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss sebagaimana berikut ini:

$$\mathbf{A - d} = \left[\begin{array}{ccc|c} 32 & 0 & 0 & 302 \\ 25 & 80 & 0 & 200 \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Dalam metode Gauss-Jordan transformasi matriks tidak hanya berhenti sebatas pada mengubah bentuk menjadi matriks segi tiga saja, melainkan mengubahnya menjadi bentuk matriks identitas. Untuk itu matriks **A – d** yang dipaparkan di atas perlu ditransformasi lebih lanjut. Target transformasi di sini adalah baris kedua dan baris ketiga.

Pada giliran pertama ini baris kedua akan menjadi prioritas terlebih dahulu. Pada baris ini, elemen yang menjadi target transformasi adalah elemen pada kolom pertama. Untuk keperluan ini maka transformasi akan dilakukan dengan memilih baris pertama sebagai basis. Dengan mengacu pada bentuk matriks identitas, maka baris pertama dan kolom pertama haruslah terisi oleh bilangan 1 (satu). Demi alasan kemudahan dan menghidari komplikasi pula maka baris pertama perlu difaktorkan agar menjadi bentuk berikut ini.

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 32\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 80 & 0 & -\frac{1150}{32} \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Selanjutnya transformasi dilakukan dengan cara mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris kedua dengan 25 (dua puluh lima) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris pertama sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 32\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 80 & 0 & -\frac{1150}{32} \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Untuk lebih mendekatakn pada bentuk matriks identitas maka baris kedua dari matriks di atas perlu difaktorkan agar baris kedua kolom kedua berisi angka 1 (satu). Untuk itu baris kedua perlu difaktorkan dengan cara membagi semua elemen yang ada pada baris tersebut dengan 80 sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 80(32)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1150}{(80)32} \\ 5 & -1 & 10 & 48 \end{array}\right]$$

Giliran transformasi selanjutnya adalah baris ketiga. Transformasi ini akan menjadikan elemen yang ada pada kolom kesatu pada baris yang bersangkutan sebagai target. Untuk itu akan dipilih baris pertama sebagai basis. Seterusnya transformasi dilakukan dengan mengurangi elemen-elemen yang ada pada baris ketiga dengan 5 (lima) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris pertama sehingga menjadi:

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 80(32)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1150}{(80)32} \\ 0 & -1 & 10 & \frac{26}{32} \end{array}\right]$$

Baris ketiga masih mempunyai elemen yang belum sesuai dengan matriks identitas. Untuk itu perlu transformasi lebih lanjut. Transformasi ini dilakukan denngan menambah elemen-elemen yang ada pada baris ketiga dengan 1 (satu) kali elemen-elemen padanannya yang ada pada baris kedua sehingga menjadi berikut ini.

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 80(32)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1150}{(80)32} \\ 0 & 0 & 10 & \frac{930}{(80)32} \end{array}\right]$$

Matriks hasil transformasi terakhir di atas belum sepenuhnya merupakan bentuk identitas karena elemen pada baris ketiga kolom ketiga bukan bilangan 1 (satu). Untuk itu bentuk ini perlu disempurnakan dengan cara memfaktorkan baris ketiga dengan membaginya dengan bilangan 10 sehingga menjadi bentuk berikut ini.

$$\mathbf{A} - \mathbf{d} = 80(32)\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{302}{32} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1150}{(80)32} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{93}{(80)32} \end{array}\right]$$

Karena bentuk trakhir sudah menunjukkan matriks identitas maka transformasi sudah final. Selanjutnya matriks gabungan di atas perlu dipisahkan lagi menjadi berikut ini:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \dfrac{302}{32} \\ \dfrac{-1150}{(80)32} \\ \dfrac{93}{(80)32} \end{bmatrix}$$

Dari paparan di depan diketahui bahwa elemen-elemen pada vektor **d** adalah merupakan penyelesaian sistem persamaan linier di atas. Oleh karena itu maka:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{302}{32} \\ &= 9.4375 \\ X_2 &= \frac{-1150}{(80)32} \\ &= -0.449219 \\ X_3 &= \frac{93}{(80)32} \\ &= 0.036328 \end{aligned}$$

Lihatlah hasil akhir yang diperoleh darfi metode Gauss-Jordan di atas dan bandingkan dengan hasil yang diperoleh pada bagian sebelumnya yang menggunakan metode eliminasi Gauss. Bisa dilihat di sana bahwa hasil yang diperoleh dari kedua metode di atas ternyata adalah sama satu dengan yang lain.

2. EXERCISE UNTUK ANALISIS MODEL

Berikut ini disajikan soal-soal untuk exercise yang akan banyak memberikan bekal untuk melakukan analisis dalam rangka pemodelan.

#1. Tentukan dimensi dari matriks hasil kali di bawah ini:

a. $\underset{(3\times2)}{\mathbf{A}}\,\underset{(2\times3)}{\mathbf{B}}$; b. $\underset{(2\times5)}{\mathbf{C}}\,\underset{(5\times1)}{\mathbf{D}}$; c. $\underset{(3\times1)}{\mathbf{E}}\,\underset{(1\times4)}{\mathbf{F}}$; d. $\underset{(1\times1)}{\mathbf{G}}\,\underset{(1\times3)}{\mathbf{H}}$; e. $\underset{(1\times1)}{\mathbf{I}}\,\underset{(4\times3)}{\mathbf{J}}$; f. $\underset{(2\times3)}{\mathbf{K}}\,\underset{(1\times1)}{\mathbf{L}}$

#2. Kalikanlah matriks di bawah ini

$$\text{a. } \mathbf{P}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}; \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 7 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 3 & 11 & 0 \\ 7 & 15 & 5 \end{bmatrix}; \mathbf{P}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 3 & 12 \end{bmatrix};$$

Bagaimana kesimpulan saudara?

#3. Pandanglah matriks-matriks di bawah ini:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} -19 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Jika seseorang menginginkan untuk memperoleh hasil dari:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Maka tunjukkan langkah yang paling mudah untuk memperolehnya

4. Kalikanlah matriks-matriks di bawah ini:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}; \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil kali dari perkalian matriks **A** dan matriks **B** di atas bersesuaian dengan sifat bilangan di mana setiap bilangan yang dikalikan dengan 0 hasilnya juga 0.

Kasus yang diberikan pada #4 adalah kasus yang bersifat umum. Namun demikian pembaca perlu mempertimbangkan dengan lebih cermat lagi kasus-kasus seperti di bawah ini,

a. Kalikanlah kedua matriks di bawah ini

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}; \mathbf{D}=\begin{bmatrix} 8 & -16 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Lihatlah matriks di bawah ini:

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Temukan hasil kali antara **E** dan **F**.

c. Setelah menemukan jawaban atas pertanyaan pada poin (a) dan poin (b) di atas, apa kesimpulan saudara?.

#5. Perhatikanlah matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 17 \\ 21 & 1 & 22 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan matriks di atas dengan menggunakan metode sebagaimana yang dicontohkan pada contoh 5.7.

b. Temukan determinan matriks di atas dengan menggunakan metode Laplace dengan mengekspresikan determinan tersebut pada baris kesatu

c. Bandingkan, metode mana yang lebih mudah?

#6. Perhatikanlah matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks di atas

b. Cermatilah matriks di atas terkait dengan nilai determinan yang saudara dapatkan pada poin (a). Apa kesimpulan saudara?

#7. Perhatikanlah matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks di atas

b. Cermatilah matriks di atas terkait dengan nilai determinan yang saudara dapatkan pada poin (a). Apa kesimpulan saudara?

#8. Perhatikanlah matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 8 \\ 1 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks di atas

b. Cermatilah matriks di atas terkait dengan nilai determinan yang saudara dapatkan pada poin (a). Apa kesimpulan saudara?

#9. Perhatikanlah matriks berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks di atas

b. Cermatilah matriks di atas terkait dengan nilai determinan yang saudara dapatkan pada poin (a). Apa kesimpulan saudara?

#10. Perhatikanlah matriks berikut ini

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks di atas

b. Cermatilah matriks di atas terkait dengan nilai determinan yang saudara dapatkan pada poin (a). Apa kesimpulan saudara?

#11. Pandanglah kedua matriks di bawah ini.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ dan } \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Carilah inverse dari kedua matriks di bawah ini.

b. Bandingkan inverse dari keduanya

c. Cermatilah, apa kesimpulan saudara terkait dengan sifat matriks identitas yang seperti bilangan 1 (satu).

#12. Kalikan matriks identitas dengan sebarang skalar, anggap δ. Kemudian cari inverse dari hasil kali tersebut. Apakah inverse yang diperoleh merupakan matriks yang berperan seperti bilangan $\frac{1}{\delta}$? Temukan jawaban saudara.

#13. Pandanglah matriks di bawah ini

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

a. Bisakah saudara menemukan inverse dari matriks di atas?

b. Bisakah saudara menjelaskan hasil yang saudara peroleh pada poin (a) di atas? Mengapa demikian?

#14. Perhatikanlah matriks-matriks berikut ini

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks-matriks **P** dan **Q** di atas.

b. Cermatilah determinan-determinan yang didapatkan tersebut. Adakah sesuatu yang menarik? Apakah itu? Cermati dan berikan penjelasan mengenai mengapa hal itu bisa terjadi

c. Apa kesimpulan saudara hal tersebut

#15. Perhatikanlah matriks-matriks berikut ini

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 9 & 21 \end{bmatrix}; \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 13 & -9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Lakukan hal-hal yang sama yang ditanyakan pada poin (a), (b) dan (c) pada pertanyaan 6 di atas

#16. Perhatikanlah matriks-matriks berikut ini

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Lakukan hal-hal yang sama yang ditanyakan pada poin (a), (b) dan (c) pada pertanyaan 6 di atas

#17. Perhatikanlah matriks-matriks berikut ini

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 12 & 25 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Temukan determinan dari matriks **W** di atas

b. Jika matriks **W** dan matriks **V** dikalikan, maka temukan determinan dari matriks hasil kali tersebut

c. Bandingkan determinan dari matriks hasil kali di atas dengan determinan matriks **W**. Cermati apa yang terjadi dan berikan penjelasan mengenai hal itu

#18. Pandanglah sistem persamaan berikut ini

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 16$$
$$9X_1 + 7X_2 + 1X_3 = 4$$
$$18X_1 + 12X_2 + 3X_3 = 12$$

Carilah penyelesaian atas sistem persamaan tersebut di atas.

a. Dengan mentransformasi matriks menjadi bentuk sgitiga atas dengan mentransformasi matriks menjadi bentuk sgitiga bawah

b. Cara mana (a) atau (b) yang lebih mudah?

#19. Berikut ini adalah sistem persamaan yang perlu diselesaikan.

$$X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 35$$
$$3X_1 + 6X_2 + 13X_3 = 6$$
$$2X_1 + 14X_2 + 9X_3 = 24$$

a. Selidikilah, strategi transformasi mana yang bisa menemukan penyelesaian atas sistem persamaan di atas dengan cara yang semudah mungkin.

b. Setelah menemukan strategi sebagaimana ditanyakan pada poin (a) di atas, bagaimana kesimpulan saudara? Jelaskan.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 9 & 7 & 1 \\ 18 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

Barelli, Paulo; Pessôa, Samuel de Abreu (2003). "Inada conditions imply that production function must be asymptotically Cobb–Douglas" (PDF). Economics Letters. 81 (3): 361–363. doi:10.1016/S0165-1765(03)00218-0. hdl:10438/1012. Last accessed on 12-23-2022

Cameron, Collin A.& Trivedi Pravin K.(2005), *Microeconometrics, Method and Appilcations*, Cambridge, USA

Chiang, A.C. & Wainright, K. (2005), *Fundamental Method of Mathematical Economics* 4th ed, McGraw Hill International Edition, New York, NY

Christensen, B.J. & Kiefer, NM., (2009). Economic Modelling and Inference, Princeton University Pres, NJ,U.S.A

Christensen, Laurits R., Jorgenson, Dale W. & Lau, Lawrence J., (1973), Transcendental Logarithmic Production Frontiers, *The Review of Economics and Statistics* Vol. 55, No. 1, pp. 28-45

Cobb, Charles W. & Douglas Paul H. A Theory of Production, *The American Economic Review*, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139-165 (27 pages) https://www.jstor.org/stable/1811556, Last accessed 01 – 03-2021

Coto-Millán, Pablo (2012). *Utility and Production: Theory and Applications.* Physica-Verlag HD, Germany.

Devlin, Keith, (2000). *The Language of Mathematics, Making the Invisible Visible*, W.H. Freemaan & Co, New York, NY.

Donald A. R. Georgem. (1988), *Mathematical Modelling for Economists*, Palgrave MacMillan, London.

Freund, John E., (1992), *Mathematical Statistics*, 5th Ed., Prentice Hall, NJ.

Glaister, Stephen (1984), Mathematical methods for economists 3rd ed, Blackwell, Oxford, England.

Gravelle, H., Rees, R. (1992). *Microeconomics,* Longman, United Kingdom

Greene, William H. (1993), *Econometric analysis,* McMillan, NY

Hair, Joseph F. JR *et al.*(1995), *Multivariate Data Analysisi with Readings,* 4th Ed., Prentice Hall Inc.NJ.

Intriligator, Michael D. (2002), *Mathematical optimization and economic theory,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia

------, *et al.* (2002), *Econometric Models, Techniques, and Applications* 2nd Ed., Prentice Hall Inc, NJ

Jehle, Geoffrey Alexander, and Reny, Philip J.(2001). *Advanced Microeconomic Theory.* Addison-Wesley, Germany.

Judge *et al.* (1985), *The Theory and Practice of Econometrics.* John Wiley and Son, NY

------ *et al.* (1987),*Introduction to The Theory and Practice of Econometrics.* John Wiley and Son, NY.

Kutner, M.H., *et al.*(2004), *Applied Linear Regression Models* 4th Ed. McGraw Hill.

Leon, Steven .J. (1990), *Linear Algebra with Application,* MacMillan Publishing Co, NY & Collier MaMillan, London.

Litina, Anastasia; Palivos, Theodore (2008). "Do Inada conditions imply that production function must be asymptotically Cobb–Douglas? A comment". Economics Letters. 99 *(3): 498–499. doi:10.1016/j.econlet.2007.09.035*

Mizrahi, A & Sullivan, M., (1993). *Mathematics for Business , Life Science and Social Science,* 5th ed, John Wiley & Son, Inc., New York, NY

Nicholson, W., & Snyder, C.(2012), *Microeconomics Theory, Basic Principles and Extentions,* 11th Ed, South Western, OH, USA

Onimode, B., & Osayimwese, Iz. (1980), *Basic mathematics for economists.* Allen & Unwin, London.

Pemberton, M & Rau, N (2001), *Mathematics for Economists: An Introductory Textbook,* Manchester University Press, Manchester

Rau, N (1981), Matrices and Mathematical Programming: An Introduction for Economists, Palgrave Macmillan U.K.

Shone, R., (2002)., *Ecocomic Dynamics*, Cambridge University Press. NY

Stachurski, J. (2009), *Economic Dynamics Theory and Computatioin*, The MIT Press, Cambridge, MA.

Steffensen, A.R., & Johnson, L.M., (1997), *Algebra*, 3rd ed, Scott, F and Co, Glenview, Ill.

Sterman, John.D. (2000), Business Dynamics System Thinking and Modelling for a Complex World, McGraw Hill Higher Education.

Stewart, J. (2001), *Calculus, Early Transcendentals*. Brook/Cole Publishing Company, Pacific Grove, CA.

Sundaram,R. (2011), A first Course in Optimization Theory, Cambridge University Press, NY

Takayama,Akira (1985), *Mathematical Economics*, 2nd Ed, Cambridge University Press

Walsh, Vivian (1987), "Models and theory", The New Palgrave: A Dictionary of Economics, vol. 3, Stockton Press, New York

Weintraub, E. Roy (1982), *Mathematics for Economists: An Integrated Approach*, Cambridge University Press, NY

Zill, Dennis G., Wright, Warren S. (2013), *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications 10th Ed*. Brooks/Cole Cengage Learning, USA