Kontribusi Untuk Ilmu Ekonomi,
Seri Permodelan II

BAGAIMANA MEMBANGUN DAN MEMVALIDASI MODEL

Penulis:

Drs. Munrokhim Misanam, MA.Ec., Ph.D.

Penerbit:

UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA

2024

Kontribusi Untuk Ilmu Ekonomi,
Seri Permodelan II

BAGAIMANA MEMBANGUN DAN MEMVALIDASI MODEL

Penulis: Drs. Munrokhim Misanam, MA.Ec., Ph.D.

Penata Letak : Gigih Mahattatwo, S.Ikom
Sampul : Gigih Mahattatwo, S.Ikom

Ukuran : 16 cm x 23 cm
Jumlah Halaman: ix + 185

Cetakan I
Januari 2024M / Rajab 1445 H

ISBN : 978-602-450-878-4
E-ISBN : 978-602-450-879-1 (PDF)

Penerbit:

UNIVERSITAS ISLAM INDONESIA

Kampus Terpadu UII
Jl. Kaliurang Km 14,5 Yogyakarta 55584
Tel. (0274) 898 444 Ext. 2301; Fax. (0274) 898 444 psw 2091
http://library.uii.ac.id/penerbit; e-mail: penerbit@uii.ac.id

Anggota IKAPI, Yogyakarta

Kata Pengantar

Buku ini merupakan bagian kedua dari dua seri. Pada bagian ini ditekankan pada memberikan bekal bagi para pebaca untuk menguasai ilmu pemodelan.

Pemodelan telah berkembang menjadi suatu disiplin tersendiri yang bisa membantu para ilmuwan untuk menggambarkan bagaimana sesuatu yang kompleks bisa dengan mudah untuk dipahami. Dalam ilmu ekonomi terdapat banyak elemen teori dibangun dan ditelusuri melalui pemodelan. Sebagai contoh adalah model mengenai biaya: biaya total (TC), biaya marjinal (MC), biaya rata-rata (AC), biaya variabel (VC), biaya variabel rata-rata (AVC), biaya tetap (FC), biaya tetap rata-rata (AFC). Selain itu perkembangan teori ekonomi pada akhir-akhir ini memformulasikan ide-ide baru juga dengan menggunakan pemodelan. Sebagai contoh adalah pengembangan teori produksi terutama mengenai bentuk fungsional dari fungsi produksi, yaitu: Fungsi produksi Cobb-Douglas, Fungsi produksi constant elasticity of substitution (CES), Fungsi produksi Variable elasticity of substitution (VES), fungsi produksi Generalized Linier of General Leontief (GLGL), Fungsi produksi Trancendental Logarithmic (TransLog).

Pemodelan di bidang ekonomi sangat membutuhkan bantuan dari disiplin lain yaitu matematika dari cabang geometri analitik dan kalkulus, selain juga dari ilmu statistika.. Karena sifatnya yang demikian dalam bidang akademik terdapat kesulitan dalam meramu elemen-elemen pemodelan tersebut dalam suatu mata kuliah tertentu. Di sinilah arti penting dari disusunnya buku tersebut. Buku ini adalah suatu referensi yang darinya seseorang bisa memperoleh gambaran bagaimana memahami model dan pemodelan serta membangun model yang dimaksudkan.

Buku ini menekankan pada tata cara dan prosedur dalam menyusun model dan bagaimana memvalidasinya, walaupun pada bagian awal memberikan bekal dan persiapan yang diperlukan dalam menyusun model. Semoga dengan sistematika yang dipilih seperti ini bisa siecara optimum memberikan pemahaman yang terbaik kepada para pembaca yang budiman

Kami merasa banyak berterimakasih kepada para kolega dan berbagai pihak, yang tidak bisa saya sebut satu persatu, atas berbagai saran yang diberikan untuk penyempurnaan buku ini. Saya juga mengucapkan terimakasih yang besar kepada Uiversitas Islam Indonesia yang telah memberikan dukungan yang begitu besar kepada penulisan dan penerbitan buku ini. Semoga buku ini bisa menjadi rujukan bagi para ilmuwan dalam menjalankan profesinya.

Yogyakarta , Desember 2023

Penulis

Daftar Isi

BEKAL TAMBAHAN MEMBANGUN MODEL FUNGSI NON LINEAR

Dalam berbagai kasus fungsi linear tidak bisa memberi gambaran secara detail mengenai variable ekonomi, melainkan hanya menggambarkan perilaku secara umum. Dalam hal ini persamaan non linear akan menjadi suatu alternatif yang baik dalam menggambarkan berbagai variable ekonomi walaupun penggunaan fungsi non-linear ini tidak sesederhana jika menggunakan fungsi linear. Dalam area ekonomi, penggunaan fungsi non-linear akan mampu merepresentasikan berbagai hal yang tidak bisa direpresentasikan oleh fungsi linear, misalnya antara lain: utilitas marginal yang menurun, peningkatan atau penurunan efisiensi dalam biaya variable, struktur pasar yang bersifat monopoli dan berbagai karakteristik teknologi dalam produksi. Pada seksi-seksi berikut ini akan dipaparkan berbagai bentuk fungsi non-linear.

1. FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum:

$$Y = aX^2 + bX + c \quad (1.1.1)$$

Bentuk umum di atas menunukkan adanya tiga terma. Pertama adalah terma yang menunjukkan ekspresi kuadratik yaitu X^2 yang mempunyai koefisien a. Kedua adalah terma X yang mempunyai koefisien b. Bersama-sama dengan terma pertama, X^2, terma ini menentukan bentuk dari fungsi kuadrat. Terakhir adalah c yang merupakan konstanta. Seperti pada pmbahasan sebelumnya terma ini menunjukkan penggal (*intercept*) garis dengan sumbu vertikal.

1.1. Ciri-ciri Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat mempunyai entuk yang khas yaitu berbentuk parabolik dengan ciri-ciri sebagaimana didiskusikan pada seksi berikut ini.

a. Mempunyai satu nilai ekstrem yang bisa berupa ekstrem positif atau negatif

   Nilai ektrem tersebut bisa ditengarai dari tanda yang dipunyai oleh koefisen X^2, yaitu a. Jika nilai a adalah positif maka nilai ekstremnya akan menjadi positif dan demikian juga sebaliknya.

b. Berbentuk lengkung parabolik yang bisa menyerupai mangkuk atau mangkuk terbalik bergantung pada sifat ekstrem yang dipunyai

Sifat dari nilai ekstrem sebagaimana disebutkan pada poin a di atas menentukan bentuk dari fungsi kuadrat. Jika nilai ekstrem yang dipunyai adalah positif maka fungsi kuadrat mempunyai ekstrem minimum. Sebaliknya jika dia mempunyai ektrem negatif maka fungsi kuadrat tersebut mempunyai ekstrem maksimum.

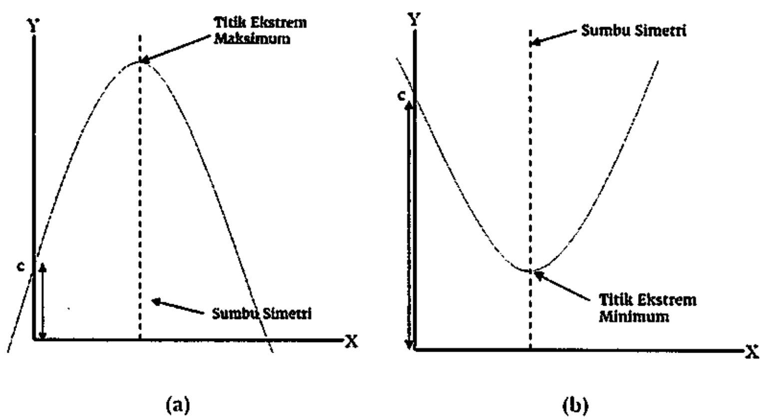
c. Simetri

Mempunyai sumbu simetri yang memotong tepat pada titik ekstrem yang sejajar dengan sumbu vertikal dan tegak lurus pada sumbu horisontal. Dalam kenyataan penggambaran grafik, sumbu simetri ini tidak selalu digambarkan. Hal ini hanyalah untuk memberikan arah dan pedoman penggambaran dan mengenali karakteristik dari fungsi kuadrat tersebut.

d. Mempunyai dua akar baik yang berupa bilangan riil maupun bilangan imajiner

Sifat akar yang dipunyai oleh fungsi kuadrat menentukan bentuk fungsi kuadrat tersebut. Jika sifat akar yang dipunyai adalah berupa bilangan riil maka fungsi kuadrat tersebut mempunyai titik potong dengan sumbu X. Sebaliknya jika sifat akar yang dipunyai adalah berupa bilangan imajiner maka fungsi kuadrat tersebut tidak mempunyai titik potong dengan sumbu X.

Gambar di bawah ini menyajikan berbagai bentuk dari fungsi kuadrat



Gambar 1.1.

Panel (a) menggambarkan fungsi kuadrat yang mempunyai ekstrem maksimum (nilai a negatif) dan mempunyai dua akar bilangan riil, sehingga mempunyai dua titik potong dengan sumbu horizontal. Panel (b) menggambarkan fungsi kuadrat yang mempunyai ekstrem minimum (nilai a positif) dan tidak mempunyai akar bilangan riil melainkan imajiner, sehingga tidak mempunyai titik potong dengan sumbu horizontal.

Coba diperhatikan bahwa sumbu simetri membelah daerah yang berada di bawah kurva, untuk panel (a), atau daerah di atas kurva, untuk panel (b) tepat sama satu dibanding yang lain.

1.2. Mengidentifikasi titik ekstrem

Langkah penting yang perlu diambil terlebih dahulu sebelum menggambarkan fungsi kuadrat adalah mengidentifikasi posisi titik ekstrem. Untuk memulai hal ini sebelumnya perlu dikenali terlebih dahulu sifat dari titik ekstrem tersebut, yaitu:

$$\text{Jika } a > 0 \Rightarrow \text{ekstrem minimum}$$

$$\text{Jika } a < 0 \Rightarrow \text{ekstrem maksimum}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan posisi titik ekstrem. Untuk tujuan tersebut sangat perlu bagi kita untuk menyajikan ekspresi umum yang darinya bisa diketahui secara langsung letak atau posisi dari titik ekstrim. Untuk tujuan ini persamaan dalam (1.1.1.) perlu ditulis kembali menjadi bentuk lain yang tidak mengubah nilai dari persamaan tersebut, anggaplah sebagai berikut:

$$Y = p(X + K)^2 + L \quad (1.1.2.)$$

$$\text{di mana } p \neq 0$$

Marilah sekarang kita cermati persamaan (1.1.2.) di atas. Persamaan (1.1.2.) di atas terdiri dari dua terma, yaitu terma pertama adalah $p(X + K)^2$ dan terma kedua adalah L. Dengan pengkategorian seperti ini, maka:

$$\text{jika } p(X + K)^2 = 0 \Leftrightarrow Y = L \ (1.1.3.)$$

Mengingat tidak ada terma lain dalam persamaan di atas, maka bisa dikatakan bahwa L adalah nilai tertinggi (atau bisa juga terendah) dari persamaan tersebut dalam domain yang telah ditentukan. Karakteristik yang dipunyai L yang merupakan nilai tertinggi (atau terendah) menunjukkan bahwa L adalah nilai ekstrem dari persamaan tersebut. Adapun sifat ekstrem tersebut bisa maksimum atau minimum bergantung pada ada atau tidaknya nilai lain yang lebih tinggi atau lebih rendah dari L. Jika tidak ada nilai lain yang lebih tinggi dari L, maka berarti bahwa L merupakan maksimum dari fungsi kuadrat tersebut yang berarti bahwa jenis ekstrem dari fungsi tersebut adalah maksimum. Sebaliknya jika tidak ada lagi nilai dalam fungsi tersebut yang lebih rendah dari L maka dia merupakan nilai terendah yang mempunyai implikasi bahwa jenis ekstrem dari persamaan tersebut adalah minimum.

Selanjutnya untuk mengetahui posisi secara presisi dari ekstrem tersebut perlu dilihat lagi struktur dari dari ekspresi (1.1.3.). Nilai Y = L bisa dicapai jika dan hanya jika $p(X+K)^2 = 0$. Padahal nilai $p(X+K)^2 = 0$ bisa dicapai jika dan hanya jika X = -K. Dengan demikian secara singkat bisa dikatakan bahwa:

Jika X = -K, maka Y = L

Dari sini akhirnya bisa diketahui bahwa posisi titik extrem teridentifikasi pada koordinat :

(-K,L) (1.1.4.)

<u>Contoh 3.1.</u>

Sebagai ilustrasi marilah kita identifikasi persamaan kuadrat berikut ini:

$$Y = X^2 - 6X + 8$$

Dalam ekspresi persamaan fungsi kuadrat di atas bisa diketahui bahwa nilai a adalah 1 (satu) yang berarti bahwa jenis ekstrem dari persamaan tersebut adalah minimum.

Langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi posisi titik ekstrem. Hal ini bisa dilakukan dengan cara menuliskan kembali persamaan di atas menjadi bentuk sebagaimana ditentukan dalam persamaan (1.1.2.) yang tentu saja tidak mengubah sifat dan nilai dari persamaan yang bersangkutan.

Untuk keperluan ini persamaan di atas bisa ditulis kembali menjadi:

$$Y = X^2 - 6X + 9-1$$

Sebelum bergerak jauh marilah kita diskusikan perubahan bentuk di atas, karena hal ini merupakan bagian yang kritis yang menentukan pemahaman pembaca. Marilah kita cermati ruas kanan dalam kedua ekspresi persamaan di atas. Jika kita memperbandingkan antara ekspresi persamaan yang terakhir dan yang sebelumnya maka kita bisa melihat bahwa keduanya tidak berubah. Perbedaan yang ada adalah terletak pada cara mengekspresikannya. Bisa dilihat di sana bahwa bilangan konstanta 8 pada ekspresi persamaan sebelumnya dituliskan dalam bentuk "9-1" pada ekspresi terakhir yang berarti juga 8. Di sana juga bisa dilihat bahwa perubahan cara mengekspresikan persamaan tersebut ternyata tidak mengubah nilai dari ruas kanan pada persamaan tersebut.

Pertanyaan yang menyangkut manuver ini adalah mengapa bilangan konstanta 8 pada ekspresi persamaan pertama harus dituliskan dalam bentuk "9-1" dan bukannya ekspresi-ekspresi lain yang jumlahnya bisa banyak sekali? Hal ini harus dilakukan seperti ini karena kita memang mempunyai agenda lain. Untuk mengetahui agenda lain yang dimaksud maka kita lihat saja manuver selanjutnya.

Ekspresi kedua dari persamaan di atas bisa kita ekspresikan dalam bentuk yang lain lagi, yaitu:

$$Y = (X^2 - 6X + 9) - 1$$

Jika kita lihat pada ekspresi terakhir di atas, ternyata kita hanya memindahkan "-1" keluar dari kelompok yang ada dalam tanda kurung yang berarti juga tidak mengubah nilai dari ruas kanan dari persamaan tersebut. Walaupun hanya dengan manuver sederhana ini namun kita akan memperoleh sesuatu yang menarik. Coba kita pandang ruas kanan dari ekspresi terakhir terutama terma yang ada dalam tanda kurung. Terma yang ada dalam tanda kurung tersebut adalah bentuk panjang dari ekspresi berikut ini:

$$(X - 3)^2$$

Untuk bisa memahami perubahan tersebut ada baiknya kita ambil lagi salah satu bagian diskusi pada appendiks aljabar di bagian belakang dari buku ini, yaitu:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Dengan melihat bentuk pendek dari terma yang ada dalam tanda kurung di atas maka hal ini menunjukkan kepada kita dan sekaligus menjawab pertanyaan di depan mengenai mengapa bilangan konstanta 8 harus dituliskan dalam bentuk "9-1". Bilangan 9 kita perlukan agar kita bisa sampai pada bentuk dalam tanda kurung terakhir. Sementara bilangan satu kita masukkan di sana dengan maksud untuk menyeimbangkan agar nilai terma tersebut tetap mempunyai nilai delapan (8) sebagaimana persamaan asalnya.

Ada teknik yang cepat untuk melakukan manuver seperti yang dilakukan di atas. Manuver tersebut dilakukan dengan cara membagi koefisien yang dipunyai oleh X, yang dalam hal ini adalah 6, dengan dua. Hasil bagi yang diperoleh, yang dalam hal ini adalah 3, kemudian dikuadratkan sehingga didapatlah angka 9. Maka sebagaimana bisa dilihat dalam pemaparan di atas, maka angka 9 dimasukkan ke dalam persamaan adalah untuk keperluan tersebut. Kemudian agar persamaan tetap tidak berubah maka bilangan 9 harus dikurangi dengan 1 untuk menjaga agar nilai dari konstanta dari persamaan tersebut tetap sebesar 8.

Dengan demikian maka ekspresi dari keseluruhan persamaan di atas bisa dituliskan kembali menjadi bentuk berikut ini:

$$Y = (X - 3)^2 - 1$$

Sekarang, lihat dan bandingkanlah ekspresi terakhir di atas dengan ekspresi dalam persamaan (1.1.2). Ternyata di sana bisa dilihat bahwa ekspresi terakhir di atas mengikuti pola dari persamaan (1.1.2.) dengan elemen-elemen seperti berikut:

$$K = -3,$$

$$L = -1$$

Berdasar pada diskusi yang telah dipaparkan di depan di mana posisi dari titik ekstrem terletak pada (-K,L). Dengan demikian kita akan bisa langsung memperoleh nilai dan posisi titik ekstrem dari persamaan ini melalui ekspresi terakhir di atas, yaitu berada pada koordinat (3,-1).

Untuk memudahkan pemahaman di bawah ini akan diberikan suatu ikhtisar mengenai teknik yang disajikan di atas. Untuk keperluan ini kita ambil lagi persamaan yang menjadi bahan perhatian kita saat ini yang diproses melalui skema yang ditunjukkan di bawah ini:

$$Y = X^2 - \boxed{6}\ X + \boxed{9 - 1 = 8}$$

$$\boxed{6:2=3} \longrightarrow 3^2 = 9$$

Skema di atas menunjukkan bahwa persamaan di atas nilainya tidak berubah yaitu tetap sama dengan persamaan awal yaitu:

$$Y = X^2 - 6X + 8$$

Proses selanjutnya mengikuti pembahasan yang disajikan di atas.

1.3. Mencari Titik Potong Grafik dengan Sumbu Horizontal

Sebagaimana disebutkan pada pembahasan sebelumnya mengenai ciri-ciri dari persamaan kuadrat yang mempunyai akar baik dalam bentuk bilangan riil maupun bilangan imajiner. Di lain pihak, terdapatnya akar persamaan kuadrat dalam bentuk bilangan riil menunjukkan bahwa persamaan kuadrat tersebut mempunyai titik potong dengan sumbu horizontal. Dengan kata lain untuk menemukan titik potong grafik dengan sumbu horizontal, hal ini bisa diperoleh melalui akar dari persamaan tersebut. Hal ini menjadi sangat penting bagi para analis untuk mengetahuinya karena hal ini akan sangat membantu dalam usaha untuk menggambarkan persamaan kuadrat tersebut.

Sebagai ilustrasi maka di bawah ini akan kita ambil lagi contoh 1.1. di atas. Persamaan di atas bisa dituliskan kembali dalam bentuk:

$$Y = (X - 4)(X - 2)$$

Dengan melihat ekspresi terakhir di atas maka akar dari persamaan di atas akan langsung bisa diketahui, yaitu:

$$X_1 = 4, \text{ dan } X_2 = 2$$

Cara yang sangat sederhana di atas bisa dilihat pada appendix aljabar yang ada pada bagian akhir dari buku ini. Perlu diketahui juga identifikasi yang cepat dan sederhana di atas bisa dilakukan karena akar dari persamaan di atas berupa bilangan bulat. Jika akar dari persamaan berupa bilangan pecah maka cara sederhana dan cepat ini tidak bisa ditempuh. Untuk melakukan hal ini maka harus dilakukan melalui penggunaan rumus:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Perssamaan dalamcontoh 1.1. di atas juga bisa dicari akarnya melalui rumus ini, yaitu:

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.8}}{2.1}$$

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$X_1 = \frac{6+2}{2} = 4$$

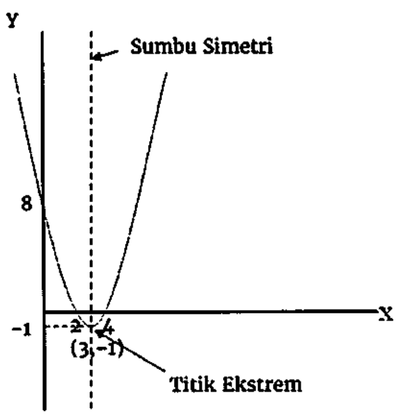
$$X_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

Terlihat pada hasil yang diperoleh melalui rumus ini ternyata sama dengan yang diperoleh melalui proses faktorisasi akar sebagaimana di paparkan pada bagian terdahulu.

Sebagaimana disampaikan di depan bahwasanya akar dari persamaan tersebut menunjukkan adanya titik potong grafik persamaan kuadrat dengan sumbu horizontal. Dengan demikian maka persamaan yang dibahas saat ini menunjukkan adanya titik potong tersebut pada $X_1 = 2$ dan $X_2 = 4$.

1.4. Plotting Fungsi Kuadrat

Dengan telah mendiskusikan semua hal yang berkaitan dengan fungsi kuadrat maka selanjutnya perlu digambarkan fungsi tersebut. Adapun gambar yang dimaksudkan bisa dilihat pada bagian di bawah ini:



Gambar 1.2.

Contoh 1.2.

Pandanglah persamaan di bawah ini:

$$Y = 3X^2 + 12X + 18$$

a. Indentifikasi jenis ekstrem dari persamaan di atas
b. Indentifikasi posisi titik ekstrem dari persamaan di atas
c. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu horisontal dengan cara mengidentifikasi akar persamaan
d. Gambarkan grafiknya

Penyelesaian:

a. Untuk mengidentifikasi jenis ekstrem perlu dilihat nilai a (koefisien dari X^2). Karena dalam persamaan di atas koefisien dari X^2 adalah 3 (tiga) yang berarti positif maka bisa dikatakan bahwa jenis ekstremnya adalah minimum.

b. Untuk mengidentifikasi posisi titik ekstremnya kita akan mengikuti langkah-langkah sebagaimana disajikan di muka yaitu mengubah pola persamaan tersebut menjadi pola persamaan 2.2., dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   Langkah 1, Faktorisasi Persamaan

   Faktorisasi di sini ditujukan agar koefisien dari terma X^2 menjadi 1 (satu). Karena koefisien dari X^2dalam persamaan di atas adalah 2 (dua) maka koefisien ini perlu difaktorkan menjadi:

$$Y = 3(X^2 + 4X + 6)$$

   Lihat sekarang bahwa koefisien X^2 dalam tanda kurung sudah menjadi 1 (satu).

   Langkah 2, Menemukan nilai K dan L

$$Y = 3(X^2 + 4X + 4 + 2)$$
$$Y = 3(X^2 + 4X + 4) + 6$$
$$Y = 3(X + 2)^2 + 6$$

   Lihat sekarang bahwa ekspresi terakhir dari persamaan tersebut sudah mengikuti pola persamaan (1.1.2.) dengan elemen-elemen sebagai berikut:

$$P = 3, K = 2, \text{ dan } L = 6$$

Langkah 3, Menemukan posisi titik ekstrem

Posisi titik ekstrem bisa langsung diperoleh melalui nilai-nilai K dan L sebagaimana yang ditunjukkan oleh ekspresi pada (1.1.4.), sehingga koordinat titik ekstremnya adalah:

(-2,6)

c. Untuk mengidentifikasi akar persamaan diperlukan penggunaan rumus a.b.c. di atas, yaitu:

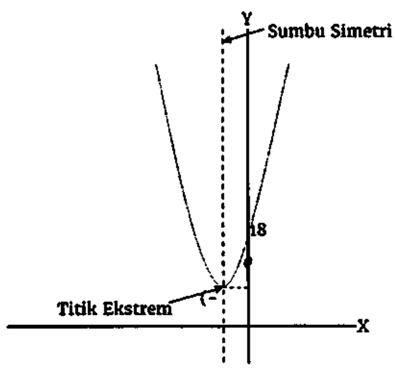
$$X_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4.3.18}}{2.3}$$

$$X_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 216}}{6}$$

$$X_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{-72}}{6}$$

Periksalah ekspresi terakhir, di sana terlihat bahwa terma kedua pada pembilang merupakan akar dari suatu bilangan yang negatif. Hal ini berarti bahwa akar dari persamaan tersebut adalah imajiner. Implikasinya adalah bahwa persamaan tersebut tidak mempunyai akar riil yang berarti bahwa persamaan tersebut tidak mempunyai titik potong dengan sumbu horisontal.

d. Gambar grafik



gambar 1.3

<u>Contoh 1.3.</u>

Pandanglah persamaan di bawah ini:

$$Y = -2X^2 - 8X + 20$$

a. Indentifikasi jenis ekstrem dari persamaan di atas
b. Indentifikasi posisi titik ekstrem dari persamaan di atas
c. Tentukan titik potong gtrafik dengan sumbu horisontal melalui identifikasi akar dari persamaan di atas
d. Gambarkan grafiknya

Penyelesaian:

Dengan menggunakan teknik yang sama dengan yang kita lakukan di depan maka kita akan bisa memperoleh hasil yang dimaksudkan.

a. Pada persamaan di atas terma X^2 mempunyai koefisien sebesar -2 sehingga jenis ekstremnya teridentifikasi maksimum

b. Indentifikasi posisi titik ekstrem dari persamaan

Langkah 1, Faktorisasi persamaan menjadi:

$$Y = -2(X^2 + 4X - 10)$$

Langkah 2, Menemukan nilai K dan L:

$$Y = -2(X^2 + 4X + 4 - 14)$$
$$Y = -2(X^2 + 4X + 4) + 28$$
$$Y = -2(X + 2)^2 + 28$$

Dari sini bisa dilihat bahwa elemen-elemen pembentuk titik ekstrem adalah:

$$p = -2, K = 2, L = 28$$

Langkah 3, Menemukan Posisi Titik Ekstrem:

Dengan mengacu pada ekspresi (1.1.4.) di atas maka titik ekstrem bisa diidentifikasi pada koordinat (-K,L). Dengan demikian titik ekstrem sudah bisa langsung diidentifikasi posisinya yaitu berada pada koordinat (-2,28).

c. Menemukan titik potong grafik dengan sumbu horisontal/ mencari akar persamaan
Akar dari persamaan di atas bisa diperoleh menggunakan rumus a.b.c. sebagai berikut:

$$X_{1.2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - (4.-2.20)}}{2.-2}$$

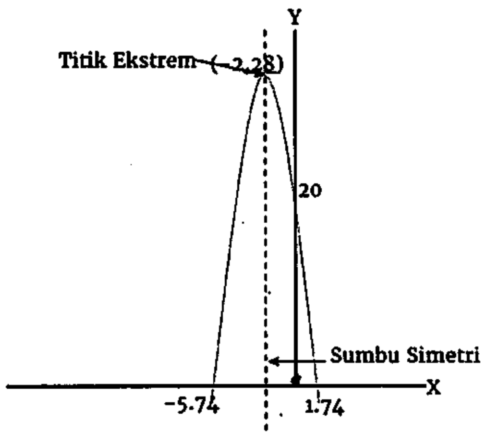
$$X_{1.2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 160}}{-4}$$

$$X_{1.2} = \frac{8 \pm 14.97}{-4}$$

$$X_1 = \frac{8 + 14.97}{-4} = -5.74$$

$$X_2 = \frac{8 - 14.97}{-4} = 1.74$$

d. Gambar Grafik



1.5. Penerapan dalam Model Ekonomi dan Bisnis

Fungsi kuadrat ini banyak merepresentasikan perilaku dari berbagai variable-variable ekonomi. Beberapa contoh diantaranya akan dibahas pada contoh-contoh berikut ini.

a. **Kurva Biaya Rata-rata**

Biaya rata-rata merupakan biaya total yang terbentuk pada titik produksi saat itu dibagi dengan jumlah produksi yang terjadi pada titik produksi yang bersangkutan. Dalam biaya rata-rata ini terkandung efisiensi yang terkait dengan produktifitas. Efisiensi yang terjadi dalam penggunaan input menyebabkan kenaikan/ tambahan input yang dipakai untuk berproduksi tidaklah konstan. Menurut teori produktifitas efisiensi yang terjadi akan semakin bertambah seiring dengan bertambahnya jumlah yang diproduksi. Namun, efisiensi yang terjadi ini tidak terjadi terus menerus seiring dengan kenaikan jumlah yang diproduksi melainkan ada batas tertentu di mana efisiensi mencapai puncaknya. Setelah titik puncak ini terlewati maka jika produksi terus bertambah maka yang terjadi bukannya efisiensi lagi melainkan inefisiensi.

Sebagai akibat dari perilaku dari penggunaan input dalam berproduksi yang mengikuti pola efisiensi seperti ini maka hal ini mempunyai implikasi pada biaya rata-rata. Biaya rata-rata per unit output tidak bergerak turun dengan penurunan yang konstan melainkan akan mengalami penurunan sampai pada titik tertentu kemudian baru berbalik arah menjadi naik seiring dengan kenaikan jumlah yang diproduksi.

Hal ini sesuai dengan perilaku fungsi kuadrat sebagaimana disajikan pada contoh-contoh di atas sebelum ini. Sebagai ilustrasi marilah kita simak contoh di bawah ini.

Contoh 1.4.

Perusahaan "Saturnus" mempunyai catatan biaya rata-rata (*average cost*) yang mengikuti pola sebagaimana di gambarkan oleh fungsi di bawah ini:

$$AC = \frac{1}{24}Q^2 - Q + 8\frac{1}{4}$$

Di mana C adalah cost (biaya) dan Q adalah jumlah unit yang diproduksi.

Periksalah kurva biaya rata-rata tersebut

a. Di manakah kurva tersebut mencapai titik minimumnya?
b. Pada jumlah output berapa biaya rata-rata tersebut mencapai minimum?
c. Berapakah biaya rata-rata minimum tersebut?

Penyelesaian:

a. Sebelum mencari titik minimum perlu melakukan identifikasi terlebih dahulu terhadap jenis ekstrem dari persamaan biaya rata-rata ini. Dari pencermatan terlihat bahwa koefisien dari Q^2 adalah positif 1 (satu) yang berarti bahwa jenis ekstrem dari persamaan biaya rata-rata ini adalah minimum.

   Selanjutnya untuk mengidentifikasi titik minimum perlu diambil langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1, faktorisasi persamaan:

$$AC = \frac{1}{24}\left(Q^2 - 24Q + 198\right)$$

Langkah 2, mencari nilai K dan L:

Untuk keperluan mencari nilai K dan L maka persamaan di atas perlu diubah ke dalam pola sebagaimana ditunjukkan oleh persamaan (1.1.2.) sebagai berikut:

$$AC = \frac{1}{24}\left(Q^2 - 24Q + 144 + 54\right)$$
$$AC = \frac{1}{24}\left(Q^2 - 24Q + 144\right) + \frac{54}{24}$$
$$AC = \frac{1}{24}(Q - 12)^2 + \frac{54}{24}$$

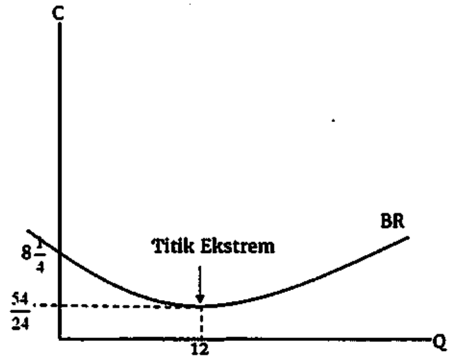
Dari ekspresi terakhir di atas bisa dilihat bahwa nilai K = -12, L = $\frac{54}{24}$ dan p = $\frac{1}{24}$

b. Dari hasil di atas bisa langsung diidentifikasi titik ekstremnya yaitu berada pada koordinat $(12, \frac{54}{24})$. Dengan demikian titik minimum dari biaya rata-rata ini tercapai ketika produksi mencapai jumlah sebesar 12 unit

c. Dengan melihat nilai L maka seseorang bisa mengetahui besarnya jumlah biaya rata-rata minimum tersebut yaitu sebesar $\frac{54}{24}$.

Semua informasi tersebut bisa dilihat dalam representasi grafis dari fungsi biaya rata-rata tersebut sebagaimana disajikan di bawah ini.

Gambar grafik:



Gambar 1.5.

b. **Kurva Biaya Marjinal**

Biaya marjinal (*Marginal Cost*/MC) merupakan suatu konsep biaya yang menduduki posisi yang sangat penting dalam analisis biaya pada area ekonòmi mikro. Biaya marginal ini menjadi pusat perhatian para ekonomist karena dia dianggap sebagai tingkat biaya yang "fair" untuk penentuan harga jual dalam perekonomian. Sebagai ilustrasi dan sekaligus untuk melihat perilaku dari biaya ini berikut ini diberikan contoh.

Contoh 1.5.

Perusahaan "Saturnus" mempunyai biaya marjinal (*marginal cost*) yang ditunjukkan oleh fungsi di bawah ini:

$$MC = \frac{1}{8}Q^2 - 2Q + 8\frac{1}{4}$$

Di mana MC adalah biaya marjinal (*marginal cost*) dan Q adalah jumlah yang diproduksi.

Periksalah kurva biaya marjinal tersebut

a. Pada jumlah output berapa biaya marjinal tersebut mencapai minimum?
b. Berapakah biaya marjinal minimum tersebut?
c. Pada jumlah output berapa biaya marjinal tersebut sama dengan biaya rata-rata?
d. Pada tingkat output dan biaya berapa biaya marginal sama dengan biaya rata-rata?

Penyelesaian:

a. Untuk menemukan titik minimumnya maka dilakukan dengan menempuh langkah-langkah di bawah ini.
   Langkah 1, Faktorisasi persamaan menjadi:

$$MC = \frac{1}{8}\left(Q^2 - 16Q + 66\right)$$

   Langkah 2, menemukan nilai K dan L:

$$MC = \frac{1}{8}\left(Q^2 - 16Q + 64 + 2\right)$$

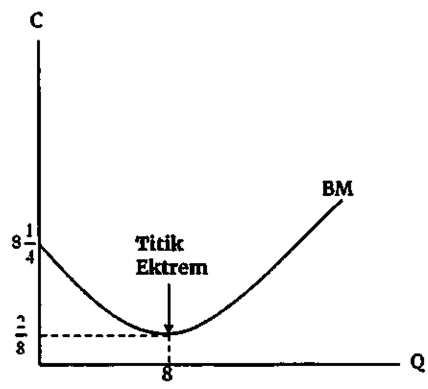
$$MC = \frac{1}{8}\left(Q^2 - 16Q + 64\right) + \frac{2}{8}$$

$$MC = \frac{1}{8}(Q-8)^2 + \frac{2}{8}$$

   Dari ekspresi terakhir bisa dilihat bahwa nilai K = -8, L = $\frac{2}{8}$ dan p = $\frac{1}{8}$
   Sehingga titik ekstrem tercapai pada koordinat (8, $\frac{2}{8}$).

b. Dengan melihat koordinat titik ekstrem tersebut maka bisa dikatakan bahwa titik minimum akan dicapai pada tingkat produksi sebesar 8 unit.

c. Dengan cara yang sama dengan yang ditempuh pada jawaban di atas maka bisa diketahui besarnya biaya marjinal minimum yaitu sebesar $\frac{2}{8}$ (dalam satuan mata uang).



Gambar 1.6.

d. Untuk mengetahui tingkat output dan biaya yang menyamakan biaya marginal dengan biaya rata-rata akan didekati dengan pendekatan analisis perpotongan garis seperti yang telah disajikan pada pembahasan di depan. Analisis perpotongan garis digunakan di sini karena mengingat bahwa dua buah garis bisa mempunyai satu tititk persekutuan yang mempunyai koordinat yang sama hanya jika keduanya berpotongan. Pada titik potong inilah kedua garis "bersatu".

Untuk melakukan identifikasi terhadap titik potong antara kurva biaya rata-rata dengan kurva biaya marjinal, maka teknik yang akan dipakai sama dengan teknik umum yang biasa dipakai pada umumnya.

Untuk memulai marilah kita periksa terlebih dahulu ruas kiri dari kedua kurva tersebut. Pada kurva biaya rata-rata ruas kiri merupakan AC (*average cost*/biaya rata-rata) sementara pada kurva biaya marginal ruas kirinya merupakan MC (*marginal cost*/ biaya marginal). Karena kedua ruas kiri tersebut merupakan biaya maka untuk kesederhanaan, di belakang ini keduanya kita simbolkan sebagai biaya (C) saja.

Selanjutnya langkah yang diambil adalah dengan mengurangkan yang satu dari yang lain, sehingga:

$$C = \frac{1}{24}Q^2 - Q + 8\frac{1}{4}$$

$$C = \frac{1}{8}Q^2 - 2Q + 8\frac{1}{4}$$

$$\text{------------} \quad (-)$$

$$0 = -\frac{2}{24}Q^2 + Q$$

$$\frac{2}{24}Q^2 = Q$$

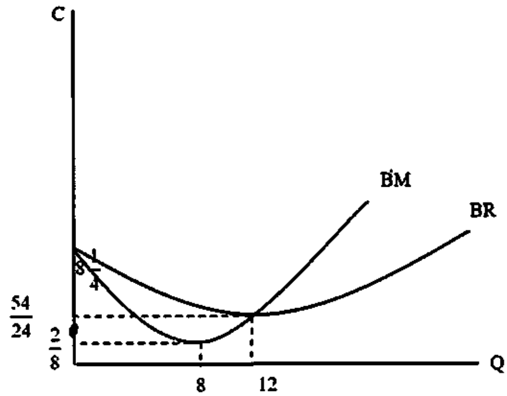
$$\frac{2}{24}Q = 1$$

$$Q = 12$$

Dengan telah ditemukannya nilai Q, kemudian nilai Q ini disubstitusikan ke dalam salah satu persamaan, baik BR ataupun BM, sehingga diperoleh nilai: $\frac{54}{24}$

Dengan demikian pada produksi sebesar 12 unit besarnya biaya rata-rata (BR) dan biaya marjinal (BM) adalah sama yaitu sebesar $\frac{54}{24}$.

Gambar grafik:



Gambar 1.7.

Perhatikan gambar di atas. Terlihat bahwa kurva biaya marginal (MC) memotong kurva biaya rata-rata pada output sebesar 12 di mana pada tingkat output ini biaya rata-rata juga mencapai titik minimum. Hal ini bukan terjadi secara kebetulan namun mereka memang selalu berpotongan pada titik tersebut.

c. **Kurva Pendapatan Total**

Dalam area ekonomi dan bisnis, pendapatan total (*Total revenue*/TR) menjadi obyek perhatian yang paling menarik. Manajer berkepentingan untuk mengetahui bagaimana perilaku dari pendapatan total (PT) ini. Hal ini demikian karena dengan mengetahui perilaku tersebut manajer dapat mempersiapkan perencanaan yang matang terutama perencanaan mengenai penjualan dan juga jenis kegiatan promosi yang akan ditempuh. Sementara perumus regulasi pemerintah berkepentingan untuk mengetahui perilaku pendapatan total dari perusahaan-perusahaan besar yang berada dalam jangkauan regulasi mereka. Dari sini perumus regulasi pemerintah akan sangat terbantu dalam menyusun rumusan regulasi dengan mengetahu perilaku dari pendapatan total ini.

Sebagai ilustrasi, marilah kita periksa contoh mengenai pendapatan total ini.

Contoh 1.6.

Marilah kita lihat kasus perusahaan "Saturnus" di depan. Untuk kesederhanaan, anggaplah Bambang merupakan satu-satunya pelanggan bagi "Saturnus" yang mana perilaku permintaannya ditunjukkan oleh data sebagaimana disajikan dalam Contoh 1.7.. Asumsikan bahwa dalam kasus ini Bambang adalah pelanggan yang sangat loyal, yakni: dalam keadaan yang bagaimanapun dia tetap akan membeli barang dari "Saturnus" dan tidak akan beralih pada perusahaan lain.

Periksalah bagaimana perilaku dari pendapatan total yang ada pada "Saturnus". Secara terperinci lihatlah pertanyaan berikut ini:

a. Tentukan jenis dari ekstrem dari pendapatan total
b. Pada jumlah penjualan berapa pendapatan total mencapai maksimum?
c. Berapa besar pendapatan maksimum tersebut?

Penyelesaian:

Untuk mengawali perlu terlebih dahulu ditemukan ekspresi fungsional dari pendapatan total. Ekspresi fungsional dari pendapatan total ini bisa dilacak melalui definisi dari pendapatan total, yaitu:

$$PT = P * Q$$

Di mana PT adalah pendapatan total, P adalah harga barang dan Q adalah jumlah barang yang terjual.

Dalam kasus ini P (harga) merupakan fungsi dari Q sebagaimana ekspresinya sudah ditemukan pada contoh-contoh yang diberikan di depan, yaitu:

$$P = -Q + 80$$

Dengan definisi tersebut maka ekspresi fungsional dari pendapatan total (PT) dapat adalah sebagai berikut:

$$PT = P * Q$$
$$PT = (-Q+80)Q$$
$$PT = -Q^2 + 80Q$$

a. Berdasar pada ekspresi fungsional dari persamaan pendapatan total (PT) di atas bisa diidentifikasi jenis ekstremnya yaitu ekstrem maksimum. Hal ini bisa diketahui melalui koefisien dari Q^2 yang negatif.

b. Untuk menemukan jumlah penjualan yang padanya pendapatan total adalah maksimum bisa ditempuh dengan cara mengidentifikasi posisi titik ekstrem dari fungsi tersebut.

Untuk mencari posisi titik ekstrem maka memerlukan beberapa langkah

Langkah 1 Faktorisasi Persamaan menjadi:

$$PT = -(Q^2 - 80Q)$$

Langkah 2 Menemukan Nilai K dan L:

Ekspresi fungsional dari PT di atas bisa ditulis dalam bentuk lain menjadi:

$$PT = -(Q^2 - 80Q + 1600 - 1600)$$

Ekspresi di atas bisa di tuliskan kembali menjadi:

$$PT = -(Q^2 - 80Q + 1600) + 1600$$

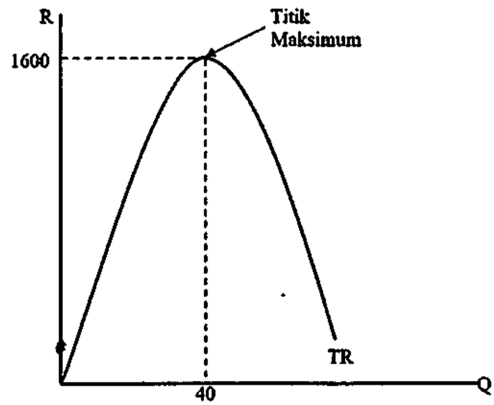
Seterusnya dengan menyederhanakan terma yang ada dalam kurung, maka ekspresi di atas bisa dituliskan kembali menjadi:

$$PT = -(Q - 40)^2 + 1600$$

Ekspresi di atas merupakan ekspresi terakhir yang mengikuti pola persamaan (1.1.2.). Dari ekspresi ini bisa langsung ditemukan nilai-nilai p = -1, K = -40 dan L = 1600. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa pendapatan total mencapai puncak (maksimum) pada saat jumlah penjualan mencapai 40 unit.

c. Puncak pendapatan total ini bisa langsung diketahui melalui nilai L yang besarnya sama dengan 1600 (dalam satuan uang)

d. Gambar grafik



Gambar 1.8.

d. Analisis Break-even dan Identifikasi Keuntungan Maksimum

Pada dasarnya analisis break-even yang akan disajikan di sini sama dengan yang dibahas pada seksi-seksi sebelumnya. Perbedaan yang ada antara analisis yang akan disajikan di bawah ini dengan yang pernah dibahas pada bagian terdahulu terletak pada bentuk fungsi pendapatan total (PT/TR). Kalau pada pembahasan terdahulu bentuk fungsi PT (TR) adalah linear namun pada analisis ini bentuk fungsi PT (TR) adalah kuadratik. Sebagai ilustrasi, di bawah ini akan disjikan contoh mengenai hal ini.

Contoh 1.7.

Untuk memulai analisis marilah kita ambil lagi contoh 1.3. mengenai perusahaan "Saturnus" yang telah teridentifikasi mempunyai fungsi biaya total sebagai berikut:

$$TC = 4 + 0.75\,Q$$

Dengan fungsi pendapatan total sebagaimana didapatkan di depan maka periksalah hal-hal berikut ini:

a. Fungsi keuntungan, apakah fungsi keuntungan ini valid?
b. Pada tingkat output berapa kondisi break-even (impas) tercapai
c. Berapa keuntungan maksimum dan pada tingkat output berapa keuntungan maksimum tercapai?
d. Gambarkan grafik yang menunjukkan hubungan antara titik impas (*break-even point*) dan keuntungan

Penyelesaian:

Sebelum mengarah pada pembahasan kondisi break even, pertama-tama yang perlu dicari adalah fungsi keuntungan.

a. Mengikuti definisi umum yang biasa dipakai maka fungsi keuntungan bisa disusun sebagai berikut:

$$\Pi = -Q^2 + 80Q - (4 + 0.75Q)$$
$$\Pi = -Q^2 + 80Q - 4 - 0.75Q$$
$$\Pi = -Q^2 + 79.25Q - 4$$

Sebelum dilakukan analisis lebih jauh perlu dilakukan pengecekan awal atas validitas dari fungsi keuntungan yang terbentuk di atas. Validitas ini menyangkut sifat atau jenis ekstrem yang dipunyai oleh fungsi keuntungan di atas. Secara intuitif fungsi keuntungan harus mempunyai jenis ekstrem yang maksimum dan bukannya yang sebaliknya. Hal ini untuk meyakinkan bahwa puncak yang ingin diraih oleh perusahaan tersebut adalah keuntungan yang maksimum dan bukannya keuntungan yang minimum.

b. Berdasar pada kondisi *break-even* sebagaimana diekspresikan pada persamaan (1.15) maka ekspresi fungsi keuntungan di atas harus menjadi:

$$\Pi = -Q^2 + 79.25Q - 4 = 0$$
$$-Q^2 + 79.25Q - 4 = 0$$

Untuk mengidentifikasi titik impas (*break even*) dari kasus di atas maka perlu dicari akar dari persamaan keuntungan dengan menggunakan formula berikut ini:

$$X_{1.2.} = \frac{-79.25 \pm \sqrt{(79.25)^2 - 4(-1)(-4)}}{-2}$$
$$X_{1.2.} = \frac{-79.25 \pm \sqrt{(79.25)^2 - 16}}{-2}$$
$$X_{1.2.} = \frac{-79.25 \pm \sqrt{6264.56}}{-2}$$
$$X_{1.2} = \frac{-79.25 \pm 79.15}{-2}$$

$$X_1 = \frac{-79.25 + 79.15}{-2}$$
$$X_1 = 0.05$$
$$X_2 = 79.2$$

Dari hasil di atas maka bisa dikatakan bahwa kondisi impas (*break even*) bisa dicapai ketika jumlah yang diproduksi adalah sebesar 0.05 dan 79.2. Jika diasumsikan bahwa satuan yang digunakan dalam fungsi di atas adalah menggunakan "lot" yang mana dalam setiap lot berisi 1000 unit barang, maka bisa dikatakan bahwa titik impas tercapai ketika jumlah unit yang diproduksi adalah sebanyak 50 unit dan 79,200 unit.

c. Untuk mengidentifikasi pada unit ke berapa jumlah keuntungan adalah maksimum perlu didekati dengan cara mencari titik maksimum dari fungsi keuntungan. Untuk itu diperlukan langkah-langkah berikut ini:

Langkah 1, Faktorisasi Persamaan, menjadi:

$$\Pi = -\left(Q^2 - 79.25Q + 4\right)$$

Setelah koefisien dari Q^2 yang ada dalam kurung berubah menjadi 1 (satu) maka diperlukan langkah selanjutnya sebagai berikut.

Langkah 2, Menemukan nilai K dan L

$$\Pi = -\left(Q^2 - 79.25Q + 1570.141 - 1566.141\right)$$
$$\Pi = -\left(Q^2 - 79.25Q + 1570.141\right) + 1566.141$$
$$\Pi = -(Q - 39.625)^2 + 1566.141$$

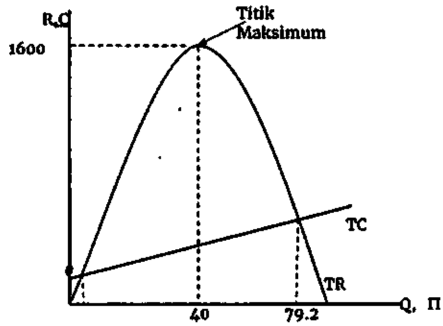
Dari ekspresi di atas bisa langsung diketahui besarnya K = -39.625 dan L = 1566.141. Sekali lagi mengingat bahwa satuan yang dipakai dalam fungsi ini adalah "lot" yang mana setiap lot berisi 1000 unit maka bisa disimpulkan bahwa besarnya keuntungan maksimum adalah:

Keuntungan maksimum = 1566.141

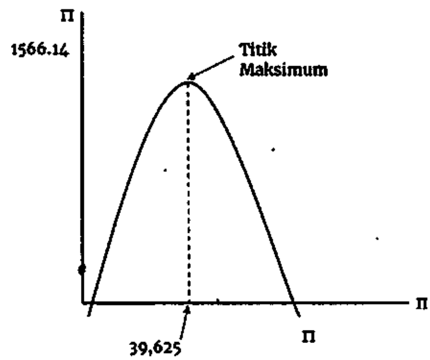
Keuntungan maksimum ini tercapai ketika

Jumlah output = 39,625 unit

d. Gambar grafik



Gambar 1.9.



Gambar 1.10.

Lihatlah gambar di atas. Ketika kondisi impas terjadi, yaitu TR = TC, pada saat itu fungsi keuntungan memotong sumbu horizontal Q. Hal ini menunjukkan bahwa pada saat itu besarnya keuntungan adalah nol. Lihat juga di sana bahwa perilaku pendapatan total (*total revenue*/TR) tidak mempunyai phase yang sama dengan keuntungan. Ketika pendapatan total (*total revenue*/TR) mencapai titik puncaknya (maksimum), ternyata hal ini tidak serta merta diikuti oleh keuntungan yang maksimum pula. Dengan demikian pendapatan total yang maksimum tidak menjamin keuntungan yang maksimum. Dalam gambar di atas terlihat bahwa keuntungan yang maksimum terjadi mendahului pendapatan total maksimum. Keuntungan mencapai titik puncak (maksimum) ketika jumlah yang terjual adalah sebesar 39.625 lot atau 39,625 unit. Sementara pendapatan total baru mencapai maksimum pada jumlah penjualan sebesar 40 lot atau 40,000 unit.

2. FUNGSI PANGKAT DAN LOGARITMIK

Ekspresi fungsi pangkat dan logaritmik sering ditemukan pada ranah teori ekonomi. Pola pertumbuhan dan bunga majemuk, misalnya, merupakan hal yang sangat tepat untuk dimodelkan dengan fungsi pangkat dan logaritmik. Bahkan karena sifat-sifat yang memudahkan prosedur kalkulasi, seringkali bentuk fungsi logaritmik ini dipilih untuk mengekspresikan hubungan antara berbagai variabel dalam ekonomi.

2.1. *Review* tentang Aturan-aturan Logaritma

Sebelum melakukan pembahasan mengenai fungsi logaritma dan fungsi pangkat berikut ini akan disajikan kaji ulang mengenai berbagai hal mengenai logaritma dan aturan-aturan yang berkaitan dengan itu. Hal ini dimaksudkan untuk mempermudah pembaca dalam memahami konsep-konsep lanjutan yang dikembangkan dalam pembahasan di belakang nanti.

2.1.1. Definisi dan Makna Logaritma

Berbagai pengertian menegenai logaritma telah banyak diberikan pada berbagai buku teks. Secara singkat definisi dan sekaligus makna dari logaritma adalah pangkat dari suatu bilangan pokok/ basis tertentu. Walaupun bilangan pokok di sini adalah merupakan bilangan riil, namun dalam area logaritma bilangan riil yang bisa digunakan sebagai bilangan pokok ditentukan terbatas pada bilangan riil positif yang tidak sama dengan satu. Alasan mengenai pembatasan atas bilangan pokok tersebut akan dibahas pada bagian-bagian di belakang nantinya.

Definisi

Untuk $n > 0, n \neq 1$

$\text{Log}_n\, n = 1$, karena

$\text{Log}_n\, n = \text{Log}_n\, n^1$

2.1.2. Aturan-aturan Logaritma

Untuk melanjutkan pembahasan, cermatilah persamaan berikut ini:

$$2^X = 32$$

Persamaan tersebut di atas bisa ditulis kembali menjadi:

$$2^X = 2^5$$

Dari persamaan terakhir di atas bisa disimpulkan secara langsung bahwa:

$$X = 5$$

Untuk memperoleh hasil sebagaimana tersebut di muka sebenarnya bisa juga didekati secara formal dengan logaritma, sebagai berikut:

$$2^X = 32$$

Persamaan di atas bisa ditulis dalam bentuk logaritma dengan mengenakan logaritma dengan basis 2 pada masing-masing ruas,sehingga:

$$\begin{gathered} \text{Log}_2\, 2^X = \text{Log}_2\, 32 \\ \text{Log}_2\, 2^X = \text{Log}_2\, 2^5 \\ X = 5 \end{gathered}$$

Dari hasil yang diperoleh di atas bisa diturunkan suatu aturan dalam penulisan logaritma sebagai berikut ini:

$$\begin{gathered} \text{Log}_2\, 2^X = \text{Log}_2\, 2^5 \\ X\,(\text{Log}_2\, 2) = 5\,(\text{Log}_2\, 2), \text{ sehingga:} \end{gathered}$$

Lihatlah terma-terma yang ada dalam tanda kurung pada kedua ruas dalam persamaan terakhir di atas. Keduanya mempunyai nilai yang sama sehingga keduanya bisa saling menghapuskan. Dengan demikian hasil akhirnya adalah:

$$X = 5$$

Aturan Pangkat

$$\textbf{Log}_n\, \mathbf{n}^P \qquad = \mathbf{P}\ \textbf{Log}_n\, \mathbf{n}$$

Untuk mengetahui lebih lanjut mengenai aturan logaritma, lihatlah persamaan berikut ini.

$$n^X = b$$

Persamaan di atas bisa ditulis dalam bentuk logaritma dengan mengenakan logaritma dengan basis n, sehingga menjadi:

$$\text{Log}_n\, n^X = \text{Log}_n b$$

Menurut aturan pangkat, sebagaimana disebut di atas, ekspresi pada persamaan di atas bisa ditulis kembali dalam bentuk lain menjadi:

$$X\ (\mathrm{Log}_n\ n) = \mathrm{Log}_n b$$

Lihat lagi terma yang ada dalam tanda kurung pada persamaan di atas. Menurut definisi yang ada sebelumnya, terma tersebut besarnya sama dengan 1 (satu). Oleh karenanya penyelesaian atas persamaan tersebut adalah:

$$X = \mathrm{Log}_n b$$

Kesetaraan Ekspresi

$$n^X = b \approx X = \mathrm{Log}_n b$$

Selanjutnya, pembahasan berikut ini akan mengeksplorasi mengenai sifat-sifat dari perkalian dari logaritma. Untuk itu anggaplah sekarang bahwa a, X dan Y adalah bilangan-bilangan dan bahwa a memenuhi syarat untuk digunakan sebagai basis dari logaritma, yakni

$$a > 0 \text{ dan } a \neq 1$$

Aturan perkalian antara bilangan berpangkat adalah berikut ini:

$$a^X a^Y = a^{(X+Y)} \text{ .....(1.2.1)}$$

Anggap seterusnya bahwa:

$$u = a^X \text{ dan } v = a^Y$$

maka

$$uv = a^X a^Y = a^{(X+Y)} \text{ .....(1.2.2)}$$

Jika ketiganya diekspresikan ke dalam bentuk logaritma menurut aturan yang dipaparkan di muka, maka hal ini menjadi:

$$\mathrm{Log}_a\ u = X, \text{ .....(1.2.3.a)}$$

$$\mathrm{Log}_a\ v = Y\text{.....(1.2.3.b)}$$

$$\mathrm{Log}_a\ (uv) = \mathrm{Log}_a\ a^{(X+Y)} = X + Y \text{ .....(1.2.4)}$$

Memasukkan persamaan (1.2.3.a) dan (1.2.3.b) ke dalam persamaan (1.2.4) memperoleh:

$$\mathrm{Log}_a\ (uv) = \mathrm{Log}_a\ u + \mathrm{Log}_a\ v$$

Aturan Hasil Kali

$$\mathrm{Log}_a\,(uv) = \mathrm{Log}_a\,u + \mathrm{Log}_a\,v$$

Waspada!!!

$$\mathrm{Log}_a\,(u + v) \neq \mathrm{Log}_a\,u + \mathrm{Log}_a\,v$$

Seterusnya, pembahasan berikut ini akan mengeksplorasi mengenai sifat-sifat dari pembagian logaritma. Untuk itu anggaplah sekali lagi bahwa a, X dan Y adalah bilangan-bilangan dan bahwa a memenuhi syarat untuk digunakan sebagai basis dari logaritma, yakni

$$a > 0 \text{ dan } a \neq 1$$

Aturan pembagian antara bilangan berpangkat adalah berikut ini:

$$a^X / a^Y = a^{(X-Y)} \;.....(1.2.5)$$

Anggap lagi bahwa:

$$u = a^X \text{ dan } v = a^Y$$

maka

$$u/v = a^X/a^Y = a^{(X-Y)} \;.....(1.2.6)$$

Jika ketiganya diekspresikan ke dalam bentuk logaritma menurut aturan yang dipaparkan di muka, maka hal ini menjadi:

$$\mathrm{Log}_a\,u = X, \;.....(1.2.7.a)$$

$$\mathrm{Log}_a\,v = Y .....(1.2.7.b)$$

$$\mathrm{Log}_a\,(u/v) = \mathrm{Log}_a\,a^{(X-Y)} = X - Y \;.....(1.2.8)$$

Memasukkan persamaan (1.2.7.a) dan (1.2.7.b) ke dalam persamaan (1.2.8) memperoleh:

$$\mathrm{Log}_a\,(u/v) = \mathrm{Log}_a\,u - \mathrm{Log}_a\,v$$

Aturan Pembagian

$$\mathrm{Log}_a\,(u/v) = \mathrm{Log}_a\,u - \mathrm{Log}_a\,v$$

Waspada!!!

$$\mathrm{Log}_a\,(u - v) \neq \mathrm{Log}_a\,u - \mathrm{Log}_a\,v$$

Pada pemaparan sebelum ini terlihat adanya penggunaan bilangan pokok atau basis yang berbeda. Namun demikian, ada cara umum yang biasa digunakan dalam mengekspresikan logaritma yaitu menggunakan basis 10 (sepuluh). Hal ini mengingat bahwa sistem bilangan yang dipakai mendasarkan pada bilangan 10 (sepuluh). Cara ini telah menjadi kesepahaman umum dalam menggunakan logaritma. Selain itu dengan penggunaan basis 10 ini cara penulisannyapun disepakati tidak dengan menuliskan angka sepuluh yang menjadi basisnya, sehingga Log_{10} Q cukup dituliskan sebagai Log Q.

Selain itu ada juga ekspresi lain dari logaritma yang biasa dipakai dalam kalkulus yaitu menggunakan bilangan natural, *e*, sebagai bilangan pokok. Karena menggunakan bilangan natural sebagai bilangan pokok maka logaritma jenis ini kemudian disebut sebagai logaritma natural yang biasa disimbulkan sebagai Ln.

2.2. Fungsi Pangkat

Bentuk umum dari fungsi pangkat adalah sebagai berikut:

$$Y = a^X \quad ....(1.2.9)$$

di mana a > 1.

Ada beberapa alasan mengpa besarnya nilai a dibatasi hanya pada nilai-nilai di atas satu. Pertama, jika seandainya nilai a adalah negatif sementara di lain pihak X adalah bilangan riil yang bisa mengambil nilai pecah seperti: $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{2}.\frac{3}{8}.\frac{5}{8}.\frac{7}{8}$ atau semacamnya di mana nilai penyebut merupakan kelipatan dari dua. Jika hal ini terjadi maka hal ini hanya bisa didekati dengan penarikan akar, dengan pangkat genap, dari bilangan negatif yang akan menghasilkan sesuatu yang tidak terdefinisi. Dengan kata lain tidak ditemukan solusi atas persamaan tersebut yang konsekuensinya fungsi tersebut menjadi tidak ada (*non-existent*). Kedua jika nilai a berada pada rentang antara nol dan satu, tidak termasuk nol dan satu, maka batasan yang disebut di muka masih akan tetap bisa diterapkan. Hal ini bisa dilihat dari penjelasan berikut ini.

Jika seandainya a mengambil nilai pada rentang sebagaimana disebut di muka, anggaplah ¼, maka persamaan (1.2.9) bisa ditulis menjadi:

$$Y = \tfrac{1}{4}^X$$

Padahal ekspresi di atas bisa ditulis dalam bentuk lain menjadi:

$$Y = 4^{-X}$$

Secara umum bisa dikatakan bahwa jika nilai a berada pada rentang: $0 < a < 1$

maka nilai X dalam persamaan (1.2.9) berubah menjadi negatif. Bentuk umum dari hal ini adalah sebagai berikut:

$$Y = a^{-X} \quad .....(1.2.10)$$
$$\text{untuk } 0 < a < 1$$

Selanjutnya batasan nilai a yang tidak membolehkan parameter tersebut untuk mengambil nilai nol adalah untuk menjamin agar supaya fungsi tersebut tetap merupakan fungsi X. Hal ini bisa dibayangkan seandainya nilai parameter a adalah nol maka besarnya Y akan tetap sebesar nol untuk nilai X yang manapun. Dengan demikian jika hal ini terjadi maka Y tidak lagi bisa dikatakan sebagai fungsi dari X. Sama halnya ketika nilai a besarnya adalah satu maka nilai Y akan tetap sebesar satu untuk nilai X yang manapun. Hal ini berarti bahwa Y tidak memberikan respon apapun terhadap perubahan yang terjadi pada nilai X sehingga konsekuensinya adalah bahwasanya Y tidak bisa dianggap sebagai fungsi dari X.

2.2.1. Karakteristik Fungsi Pangkat

Sebelum melangkah pada usaha untuk menggunakan fungsi pangkat sebagai basis analisis maka perlu diketahui terlebih dahulu karakteristik, baik yang bersifat umum maupun bersifat khusus, dari fungsi tersebut. Secara umum fungsi pangkat merupakan fungsi yang kontinyu pada titik manapun yang termasuk dalam domain fungsi tersebut. Adapun karakteristik khususnya adalah, pertama, bahwasanya fungsi tersebut bersifat asimptotis terhadap sumbu horisontal, X. Maknanya adalah bahwa fungsi tersebut pada nilai yang tertentu sangat berdekatan dengan sumbu horisontal X hingga keduanya nampak seperti menempel satu dengan lainnya walaupun sebenarnya tidak demikian. Karakteristik yang seperti ini bisa dilihat dari nilai Y, tepatnya ketika nilai tersebut sama dengan nol. Jika nilai Y sama dengan nol, sebagai syarat perpotongan grafik dengan sumbu horisontal, maka nilai Y ini bisa disubstitusikan masuk ke dalam persamaan (1.2.9) sebagaimana berikut ini.

$$Y = 0, \text{ maka}$$
$$\rightarrow 0 = a^X$$

Penyelesaian atas persamaan di atas bisa dilakukan dengan menempuh langkah-langkah berikut ini, yaitu mengenakan logaritma dengan basis a pada kedua ruas dari persamaan di atas sehingga diperoleh:

$$\begin{gathered} \text{Log}_a\, 0 = \text{Log}_a\, a^X \\ \text{Log}_a\, 0 = X(\text{Log}_a\, a) \\ \text{Log}_a\, 0 = X \\ X = \text{Log}_a\, a^{-\infty} \\ X = -\infty\, (\text{Log}_a\, a) \\ X = -\infty \end{gathered}$$

Untuk kasus di mana nilai a berada pada rentang berikut ini:

$$0 < a < 1$$

maka jika nilai Y sama dengan nol, sebagai syarat perpotongan grafik dengan sumbu horisontal, untuk mengetahui nilai X yang bertepatan dengan nilai Y ini maka Y perlu disubstitusikan masuk ke dalam persamaan (1.2.10) sebagai berikut ini.

$$Y = 0, \text{ maka}$$
$$\rightarrow 0 = a^{-X}$$

Persamaan di atas bisa terpenuhi hanya untuk:

$$\begin{gathered} \text{Log}_a\, 0 = \text{Log}_a\, a^{-X} \\ \text{Log}_a\, 0 = -X(\text{Log}_a\, a) \\ \text{Log}_a\, 0 = -X \\ -X = \text{Log}_a\, a^{-\infty} \\ -X = -\infty\, (\text{Log}_a\, a) \\ X = \infty \end{gathered}$$

Karena ∞ bukan merupakan bilangan yang teerdefinisi, maka konsekuensi dari hal ini adalah bahwa nilai X yang dicari, sebagai tempat perpotongan grafik dengan sumbu X, tidak bisa ditemukan atau secara praktis bisa dikatakan tidak ada. Hal ini memberi konsekuensi lebih jauh bahwa grafik fungsi tersebut tidak mempunyai titik potong dengan sumbu horisontal X.

Karakteristik kedua dari fungsi ini adalah bahwasanya dia selalu memotong sumbu tegak, Y, pada koordinat (0,1). Alasan mengapa hal ini bisa demikian bisa dilihat pada penjabaran berikut. Jika X mengambil nilai sama dengan nol, sebagai persyaratan perpotongan grafik dengan sumbu tegak Y maka untuk memperoleh nilai Y yang bertepatan dengan nilai X tersebut adalah dengan memasukkannya ke dalam persamaan (1.2.9) untuk nilai a lebih besar dari satu; atau, memasukkannya ke dalam persamaan (1.2.10) untuk nilai a yang berada pada rentang antara nol dan satu, tidak termasuk nol dan satu, sehingga:

Jika $X = 0$, maka:

$$\rightarrow Y = a^0$$

$$Y = 1 \text{ (untuk } a > 1)$$

Jika $X = 0$, maka:

$$\rightarrow Y = a^{-0}$$

$$Y = 1 \text{ (untuk } 0 < a < 1)$$

Pada setiap kasus di atas ternyata besarnya Y adalah sama sehingga koordinat perpotongan grafik dengan sumbu tegak Y adalah (0,1).

2.2.2. Plotting Fungsi Pangkat

Setelah mengetahui karakteristik dari fungsi pangkat yang disebutkan di muka maka langkah selanjutnya adalah melakukan plotting atas fungsi tersebut ke dalam sistem koordinat Cartesian. Untuk melakukan hal ini tidak ada prosedur yang spesifik sehingga bisa langsung memilih nilai X yang diinginkan danmencari nilai Y yang bertepatan dengan nilai X tersebut. Dengan telah diperolehnya titik-titik koordinat tersebut maka langkah penggambaran selanjutnya bisa dilakukan dengan menghubungkan titik-titik tersebut, secara halus, satu dengan lainnya hingga menggambarkan keseluruhan badan/bodi dari grafik fungsi tersebut. Untuk mempermudah hal ini, nilai-nilai X yang dipilih dan nilai Y yang bertepatan dengan nilai-nilai X pilihan disajikan ke dalam tabel berikut ini.

Tabel 1.1.

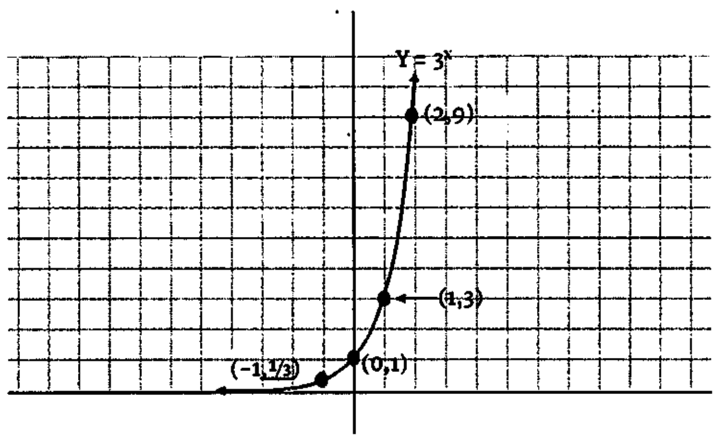
$Y = a^X$ Untuk $a = 3$	
X	Y
0	1

$Y = a^X$ Untuk a = 3	
1	3
-1	1/3
2	9
-2	1/9
3	27
-3	1/27
4	81
-4	1/81

Jika nilai-nilai X dan Y dalam tabel di atas di-plot dalam ssutu sistem koordinat Cartesian beserta karakteristik yang sudah dipaparkan di depan maka akan diperoleh grafik fungsi pangkat dengan persamaan:

$$Y = 3^X$$

sebagaimana disajikan berikut ini.

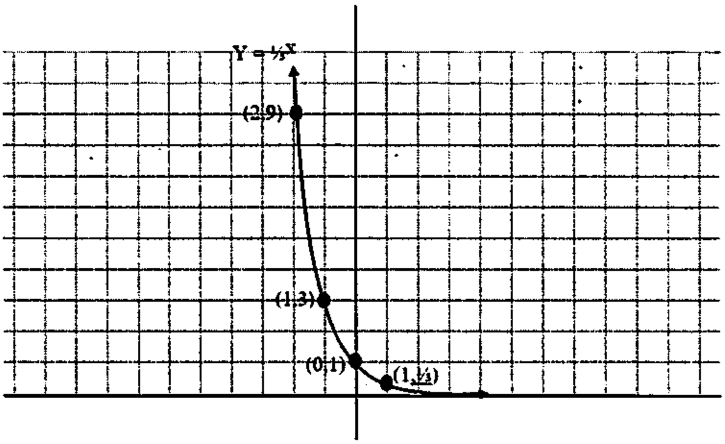


Gambar 1.11.

Dalam contoh di atas, nilai yang diperoleh beserta representasi grafiknya adalah didasarkan pada nilai a yang lebih besar satu. Di bawah ini akan disajikan proses memperoleh nilai Y dalam fungsi pangkat dan representasi grafiknya untuk nilai a yang kurang dari 1.

Tabel 1.2.

$Y = a^X$ Untuk a = ⅓	
X	Y
0	1
1	⅓
-1	3
2	1/9
-2	9
3	1/27
-3	27
4	1/81
-4	81



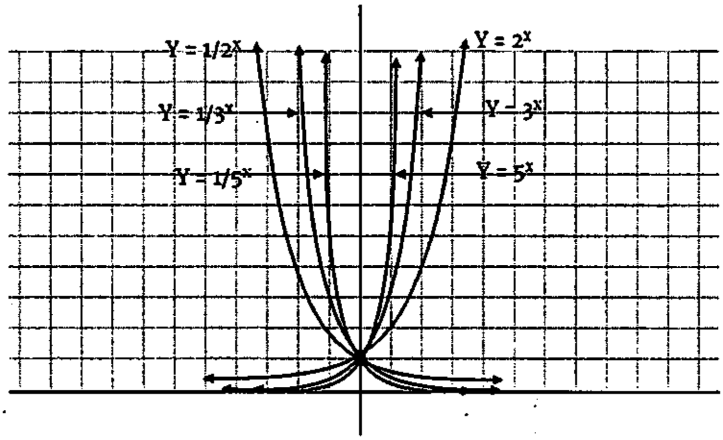
Gambar 1.12.

Berikut ini disajikan berbagai ploting dari fungsi pangkat dengan berbagai nilai basis a yang berbeda. Sebelumnya di bawah ini disajikan tabel dari nilai X yang dipilih dan nnilai Y yang berkaitan pada berbagai nilai basis a.

Tabel 1.3.

$Y = 2^X$		$Y = ½^X$		$Y = 3^X$		$Y = 1/3^X$		$Y = 5^X$		$Y = (1/5)^X$	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	2	1	½	1	3	1	1/3	1	5	1	1/5
-1	½	-1	2	-1	1/3	-1	3	-1	1/5	-1	5
2	4	2	¼	2	9	2	1/9	2	25	2	1/25

$Y = 2^X$		$Y = ½^X$		$Y = 3^X$		$Y = 1/3^X$		$Y = 5^X$		$Y = (1/5)^X$	
-2	¼	-2	4	-2	1/9	-2	9	-2	1/25	-2	25
3	8	3	1/8	3	27	3	1/27	3	125	3	1/125
-3	1/8	-3	8	-3	1/27	-3	27	-3	1/125	-3	125



Gambar 1.13.

Bisa dilihat pada tabel 3.3. dan gambar 3.10 di atas bahwasanya pada setiap nilai X nol nilai Y selalu satu pada tabel tersebut. Begitu juga pada gambar 3.10. semua grafik yang ada selalu memotong sumbu tegak, Y, tepat pada koordinat (0,1). Hal ini memang menunjukkan karakteristik yang khas dari fungsi pangkat.

2.3. Fungsi Logaritma

Sebagaimana sudah diketahui pada pembahasan pada seksi-seksi sebelum ini bahwasanya fungsi logaritma adalah merupakan bayangan cermin dari fungsi pangkat. Untuk mengingat, hal ini bisa ditengok lagi pada kesetaraan ekspresi antara fungsi pangkat dan fungsi logaritma di depan. Untuk mempermudah, berikut ini disajikan kembali mengenai hal ini.

$$n^X = b \approx X = \mathrm{Log}_n b \quad ...(1.2.11)$$

Ekspresi 3.2.11) di atas menunjukkan bahwa ekspresi fungsi pangkat, $n^X = b$, adalah setara dengan ekspresi fungsi logaritma, $X = \mathrm{Log}_n b$.

Bentuk umum dari fungsi logaritma bisa ditentukan sebagai berikut ini:

$$Y = \log_a X ...(1.2.12.)$$

Berdasar pada sifat sebagaimana ditunjukkan oleh persamaan (1.2.11) di atas maka persamaan (1.2.12.) bisa ditulis dalam bentuk:

$$X = a^Y$$

Variant dari persamaan (1.2.12.) adalah:

$$Y = -\log_a X ...(1.2.13.)$$

Persamaan tersebut di atas setara dengan:

$$X = a^{-Y}$$

Lihat dan bandingkanlah persamaan (1.2.12.) dan persamaan (1.2.9.), juga antara

persamaan (1.2.13.) dan persamaan (1.2.10.), mereka adalah merupakan kebalikan dari satu dengan yang lain. Sifat yang seperti ini perlu terlebih dahulu untuk diketahui agar mempermudah memahai karakteristik dan bentuk dari fungi logaritma.

2.3.1. Karakteristik Fungsi Logaritma

Sebagai konsekuensi dari sifat yang disebut di atas maka bisa dikatakan bahwa fungsi logaritma mempunyai bentuk yang identik dan berhadap-hadapan dengan fungsi pangkat. Lebih jauh bisa dikatakan bahwa antara fungsi pangkat dan fungsi logaritma yang setara, seperti antara persamaan (1.2.9) dan persamaan (1.2.12), terdapat sumbu simetri yang terletak di antara keduanya yang secara lebih rinci akan dibahas pada bagian di belakang nanti.

Oleh karena sifat yang demikian, fungsi logaritma juga mempunyai karakteristik yang sama dengan fungsi pangkat. Karakteristik tersebut adalah, pertama, bahwasanya fungsi ini adalah kontinyu pada semua titik manapun dalam domainnya. Kedua, fungsi tersebut bersifat asimtotis terhadap sumbu tegak. Sifat ini bisa ditelusuri melalui titik potong grafik dengan sumbu tegak, Y.

Pertimbangkan sekarang persamaan $X = a^Y$ (1.2.12.). Untuk mengetahui di mana fungsi ini memotong sumbu tegak, Y, maka prosedur baku yang perlu ditempuh adalah menetapkan nilai X sama dengan nol. Jika nilai nol ini disebstutisikan ke dalam persamaan (1.2.12.) maka akan memperoleh hasil berikut ini.

$$Y = \log_a 0$$
$$Y = (\ Log_a\ a^{-\infty})$$
$$Y = -\infty(\ Log_a\ a)$$
$$Y = -\infty$$

Prosedur yang sama juga bisa dilakukan untuk kasus yang lain yang diekspresikan oleh persamaan (1.2.13.) sebagai berikut ini, yaitu dengan mensubstitusikan nilai X = 0 ke dalam persamaan (1.2.13.) sehingga diperoleh:

$$-Y = \log_a 0$$
$$-Y = (\ Log_a\ a^{-\infty})$$
$$-Y = -\infty(\ Log_a\ a)$$
$$-Y = -\infty$$
$$Y = \infty$$

Karena ∞ adalah bilangan yang tidak terhingga maka secara sederhana hal ini bisa dikatakan bahwa tidak ada perpotongan antara fungsi tersebut dengan sumbu tegak, Y. Konsekuensinya adalah bahwa grafik fungsi tersebut bersifat asimtotis terhadap sumbu tegak, Y. Hal ini memberi makna bahwa grafik fungsi tersebut pada nilai X = 0 dia sangat mendekati atau hampir bersinggungan dengan sumbu tegak, Y, walaupun tidak sampai menyinggung, apalagi memotong.

Seterusnya karakteristik lain dari fungsi logaritma adalah titik potong fungsi logaritma dengan sumbu X. Sebagai bayangan cermin dari fungsi pangkat, fungsi logaritma selalu memotong sumbu X pada koordinat (1,0). Untuk mengetahui karakteristik ini perlu dilihat titik potong fungsi logaritma ini dengan sumbu horizontal. Pada titik potong yang dimaksud, nilai Y = 0. Untuk itu perlu disubstitusikan nilai Y = 0 ke dalam persamaan (1.2.12) dan (1.2.13).

$$\text{Jika } Y = 0, \text{ maka}$$
$$0 = \log_a X$$

Prosedur untuk menyelesaikan persamaan di atas adalah dengan mengubah ekspresi di atas menjadi bentuk pangkat sebagai berikut ini:

$$X = a^0$$
$$X = 1$$

Begitu juga untuk persamaan (1.2.13.).

$$\text{Jika } Y = 0, \text{ maka}$$
$$-0 = \log_a X$$

Sama seperti teknik penyelesaian persamaan sebelumnya maka prosedur untuk menyelesaikannya adalah dengan mengubah ekspresi di atas menjadi bentuk pangkat sebagai berikut ini:

$$X = a^{-0}$$
$$X = 1$$

Dengan demikian koordinat titik potong dengan sumbu X pada kedua kasus ini adalah (1,0). Bandingkan karakteristik ini dengan karakteristik yang sejenis pada fungsi pangkat yang mana selalu memotong sumbu tegak, Y, pada koordinat (0,1). Terlihat di sini bahwa keduanya merupakan bayangan cermin satu sama lainnya.

2.3.2. Plotting Fungsi Logaritma

Langkah selanjutnya dalam membahas fungsi logaritma adalah melakukan plotting atas fungsi tersebut ke dalam sistem koordinat Cartesian. Sama halnya yang ada pada fungsi pangkat, tidak ada prosedur yang spesifik dalam melakukan ploting fungsi ini. Hal ini disebabkan karena tidak ada karakteristik lain yang bisa memberikan ciri khas kecuali yang telah disebut di muka. Untuk itu mekanisme plotting fungsi tersebut bisa langsung memilih nilai X yang diinginkan dan menemukan nilai Y yang bersesuaian dengan nilai X tersebut. Perlu dicatat di sini bahwasanya tidak ada prosedur tertentu untuk memilih nilai X. Jadi hal ini dipilih secara sebarang. Pada banyak kasus seseorang memilih nilai-nilai X, yang darinya akan dicari nilai Y, menurut pertimbangan kemudahan kalkulasi belaka. Hal ini tidak mengapa dan sepenuhnya diserahkan pada kemauan masing-masing.

Jika titik-titik yang dipilih sudah ditemukan koordinatnya maka langkah selanjutnya adalah menghubungkan titik-titik tersebut satu sama lain hingga membentuk grafik fungsi secara penuh. Sebagai ilustrasi berikut ini disajikan nilai-nilai X yang dipilih secara sebarang dan kemudian dicari nilai Y yang bersesuaian dengan nilai X tersebut. Untuk mempermudah penyajian, nilai-nilai X dan Y yang ada disajikan ke dalam tabel berikut ini.

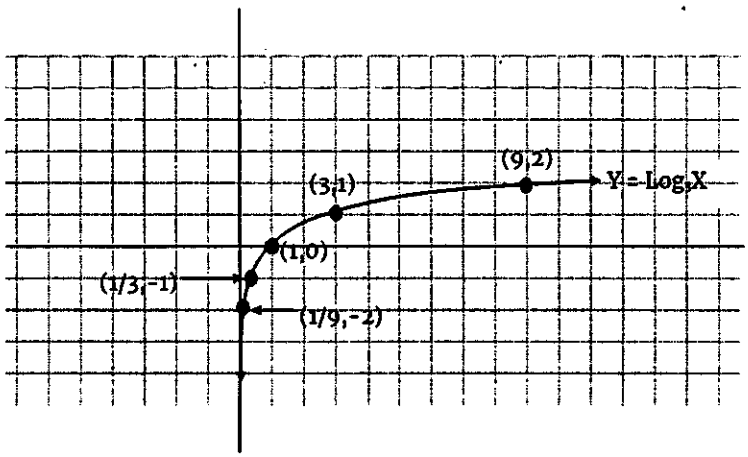
Tabel 1.4.

$Y = \log_a X$ Untuk a = 3	
X	Y
1/27	-3
1/9	-2
1/3	-1
1	0
3	1
9	2
27	3

Contoh Perhitungan:
Untuk X = 1/27,
$Y = \log_3(1/27)$
$Y = \log_3(3)^{-3} = -3$

Untuk X = 1,
Y = log3(1)
Y = log3(3)0 , karena 30 = 1
Y = 0

Seterusnya nilai-nilai X dan Y yang bersesuaian yang diperoleh pada tabel 3.3. di atas diplotkan ke dalam grafik sebagai berikut ini.



Gambar 1.14.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas lagi mengenai plotting fungsi logaritmik berikut ini akan disajikan plotting grafik fungsi logaritma dengan nilai a yang lebih kecil dari 1. Ini dilakukan mengingat bahwa plotting yang dibuat di atas adalah fungsi logaritmik dengan nilai a yang lebih besar dari 1.

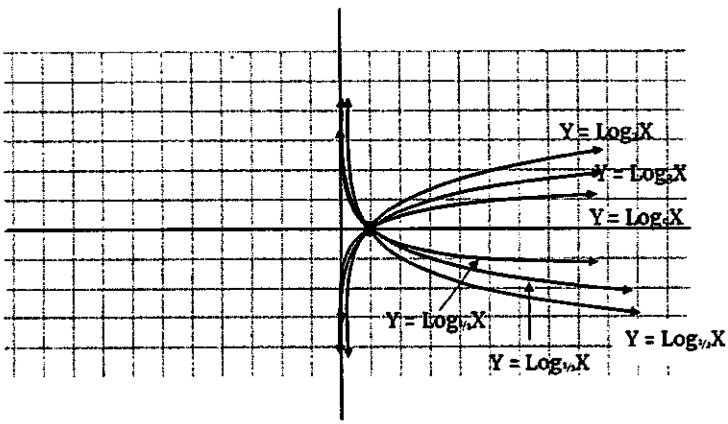
Tabel 1.5.

$Y = \log_a X$ Untuk $a = \frac{1}{3}$	
X	Y
1/27	3
1/9	2
1/3	1
1	0
3	-1
9	-2
27	-3

Contoh Perhitungan:
Untuk X = 1/27,
$Y = \log_{\frac{1}{3}}(1/27)$
$Y = \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})3 = 3$

Untuk X = 1,
$Y = \log_{\frac{1}{3}} (1)$
$Y = \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})0$, karena $\frac{1}{3}0 = 1$
$Y = 0$

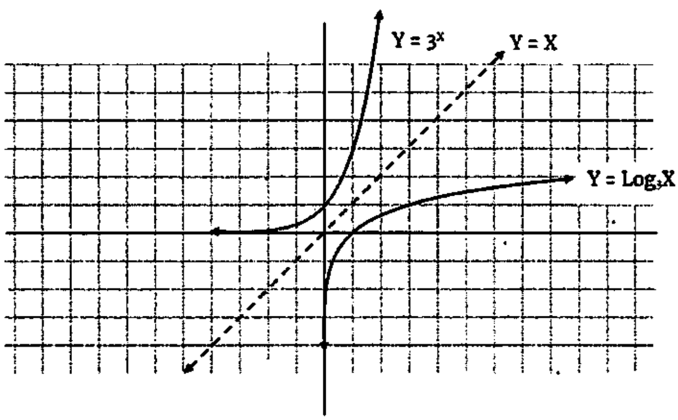
Untuk memberikan pemahaman yang lebih mendasar lagi, berikut ini kedua gambar, 3.11. dan 3.12 dan juga grafik fungsi logaritmik dengan berbagai nilai a. Mereka sengaja diplotkan pada satu sistem sumbu yang dimaksudkan agar pembaca bisa melakukan perbandingan atas berbagai grafik yang mempunyai nilai a yang berbeda.



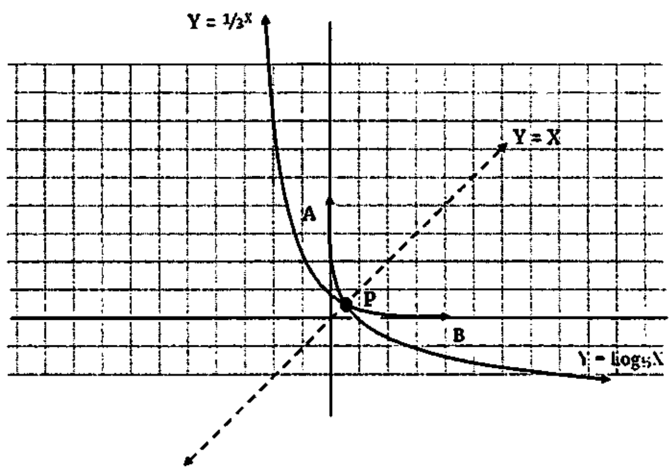
Gambar 1.16.

Sekarang tiba saatnya untuk mengetahui potret dari grafik fungsi pangkat dan fungsi logaritma yang setara. Secara lebih khusus hal ini dilakukan untuk mengetahui bagaimana posisi masing-masing ketika mereka dalam keadaan bersamaan. Dengan cara ini pula pembaca akan lebih memahami bagaimana persamaan dan perbedaan dari keduanya. Untuk tujuan ini, grafik fungsi pangkat dan grafik fungsi logaritma perlu dipersandingkan pada satu sistem sumbu yang sama.

Pada gambar 3.14 di bawah ini garfik fungsi pangkat dan fungsi logaritma keduanya mempunyai nilai basis, a, yang lebih besar dari 1. Pada gambar ini bisa dimunculkan adanya satu sumbu simetri dengan persamaan Y = X. Sumbu simetri ini bisa dianggap sebagai garis lipat. Pengertian dari garis lipat di sini yaitu jika gambar keduanya dilipat tepat pada sumbu simetri maka gambar grafik fungsi pangkat dan fungsi logaritma yang setara, yakni yang mempunyai nilai basis yang sama, akan berimpit satu sama lain.



Gambar 1.17.



Gambar 1.18.

Pada gambar 3.15 keadaannya sedikit berbeda. Kedua grafik fungsi tidak akan berimpit walaupun di lipat tepat pada garis lipat atau sumbu simetri. Namun demikian, jika dicermati dengan lebih seksama bisa dilihat bahwasanya kedua grafik tersebut memunculkan dua buah bentuk bidang. Untuk keperluan identifikasi, titik potong tersebut disebut titik P. Bidang yang dimaksud adalah bidang antara kedua grafik fungsi setelah berpotongan dengan sumbu simetri. Untuk memperjelas, bidang yang pertama disebut bidang A dan bidang kedua disebut bidang B. Dengan demikian bidang A dibentuk oleh kedua grafik fungsi yang terletak pada sisi kiri atas titik P dan bidang B terletak pada sisi kanan bawah titik P. Kedua bidang ini, jika dicermati dengan lebih teliti, mempunyai bentuk yang sama dan sebangun tepat pada titik P. Dengan demikian jika gambar tersebut dilipat tepat pada sumbu simetri maka kedua bidang tersebut akan tepat berimpit satu sama lain.

2.3.3. Modifikasi Titik Potong Grafik

Titik potong grafik, dengan sumbu Y maupun sumbu X, mempunyai penafsiran yang sangat strategis dalam analisis ekonomi. Besar kecilnya nilai koordinat titik potong ini menunjukkan jarak titik potong tersebut dengan titik pangkal (0,0). Banyak dinamika dalam analisis ekonomi yang bisa diungkap melalui titik potong grafik tersebut.

Dalam analisis ekonomi, lokasi atau koordinat titik potong grafik ini bervariasi yang masing-masing mengandung penafsiran sendiri-sendiri. Sementara pada pembahasan selama ini sebagaimana diungkap di muka ditemukan bahwa titik potong grafik fungsi pangkat dan logaritma koordinatnya sudah tertentu, yaitu: pada (0,1) untuk fungsi pangkat dan (1,0) untuk fungsi logaritma. Di sini jelas bahwa sifat yang seperti ini telah sangat membatasi analisis ekonomi jika menggunakan kedua fungsi tersebut. Untuk itu, agar fungsi tersebut tidak berkurang manfaatnya dalam ekonomi maka diperlukan modifikasi. Modifikasi di sini diutamakan pada lokasi atau koordinat penggal grafik yang memotong sumbu tegak maupun sumbu datar. Dengan modifikasi ini maka jarak dari penggal grafik fungsi ke titik pangkal, (0,0), besarnya bisa bervariasi sesuai dengan tuntutan teori ekonomi.

Adapun modifikasi tersebut dilakukan dengan cara menambahkan angka konstanta tertentu pada ruas kanan. Untuk memulai hal ini, berikut ini dihadirkan lagi persamaan umum dari fungsi pangkat yang ada pada persamaan (1.2.9) dengan mengalikannya dengan sebuah bilangan, c (untuk kasus pada persamaan (1.2.10) yang merupakan variant dari persamaan 3.2.9 dipersilahkan ke para pembaca untuk melakukannya sendiri sebagai latihan).

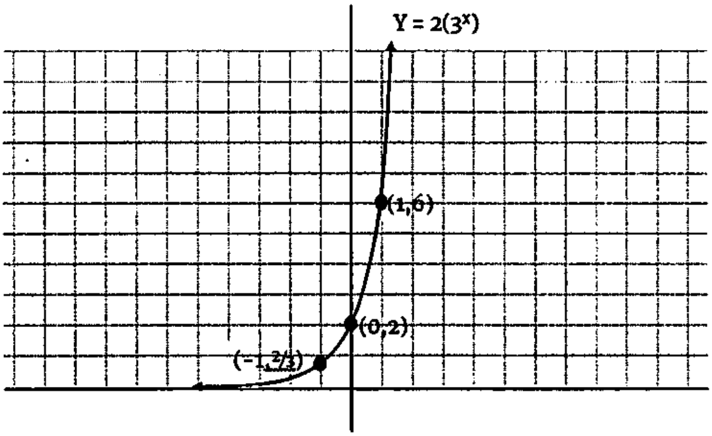
$$Y = c(a^X) \quad ...(1.2.14)$$

Bilangan c yang dimasukkan ke dalam persamaan (1.2.14) di atas berperan sebagai layaknya konstanta yang ada pada persamaan linier. Konstanta c inilah yang akan menentukan jarak antara titik potong grafik dan titik pangkal. Untuk mengetahui hal ini secara jelas berikut ini akan dihadirkan kembali informasi angka yang ada dalam tabel 3.1. dengan mengganti persamaannya dengan persamaan (1.2.14).

Tabel 1.6.

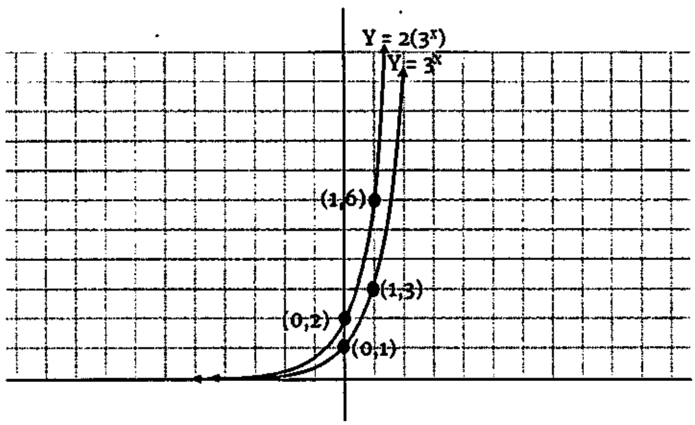
$Y = c(a^X)$ Untuk a = 3, c = 2 $Y = 2(3^X)$	
X	Y
0	2
1	6
-1	2/3
2	18
-2	2/9
3	54
-3	2/27
4	162
-4	2/81

Jika informasi angka pada tabel 3.5. di atas diplotkan ke dalam sistem sumbu Cartesian maka akan diperoleh grafik berikut ini.



Gambar 1.19.

Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas terutama mengenai perbandingan antara bentuk yang ada pada persamaan (1.2.9) dan yang ada pada persamaan (1.2.14) berikut ini kedua grafik fungsi tersebut akan diplotkan dalam satu sistem sumbu yang sama.



Gambar 1.20.

Pada gambar 3.17. di atas terlihat bahwa semua jarak grafik fungsi yang kedua, $Y = 2(3^X)$, dengan sumbu horisontal adalah dua kali lipat dibandingkan dengan grafik yang pertama, $Y = 2(3^X)$. Titik potong grafik fungsi yang pertama dengan sumbu Y terletak pada koordinat (0,1), sementara titik potong grafik fungsi yang kedua dengan sumbu Y terletak pada koordinat (0,2). Hal ini juga berlaku bagi titik-titik yang lain pada kedua fungsi. Misalnya pada nilai X satu, pada grafik pertama nilai ordinatnya adalah 3 (1,3) sementara pada grafik fungsi yang kedua nilai ordinatnya adalah 6 (1,6). Ini semua disebabkan oleh hadirnya konstanta c yang besarnya dalam kesempatan ini adalah 2. Jika nilai c diubah-ubah maka jarak penggal garis tersebut juga akan berubah sesuai dengan besarnya konstanta c. Secara sederhana bisa dikatakan bahwa konstanta c berperan sebagai konstanta kelipatan. Hal ini disebut demikian karena jarak antara penggal garis dengan titik pangkal, (0,0), akan berlipat sebesar c yang dalam kasus di atas adalah 2.

Hal yang sama dengan di atas juga bisa ditemui pada fungsi logaritma. Untuk memeriksa hal tersebut berikut ini dihadirkan lagi persamaan umum fungsi logaritma, dari persamaan (1.2.12), yang telah dimodifikasi dengan mengalikannya dengan konstanta c sehingga bentuknya menjadi:.

$$Y = \log_a (X/c) \quad \ldots (1.2.15)$$

Di sini perlu membahas terlebih dahulu mengapa persamaan umum logaritma sebagaimana yang ada pada persamaan (1.2.12) bisa berubah menjadi (1.2.15) ketika dimasukkan konstanta c. Hal ini bisa dilihat dengnan mengubah terlebih dahulu persamaan (1.2.12) ke dalam bentuk standar ekspresi pangkat, yakni:

$$X = a^Y$$

Dengan mengalikannya dengan konstanta c, maka bentuknya berubah menjadi:

$$X = ca^Y$$
$$X/c = a^Y$$

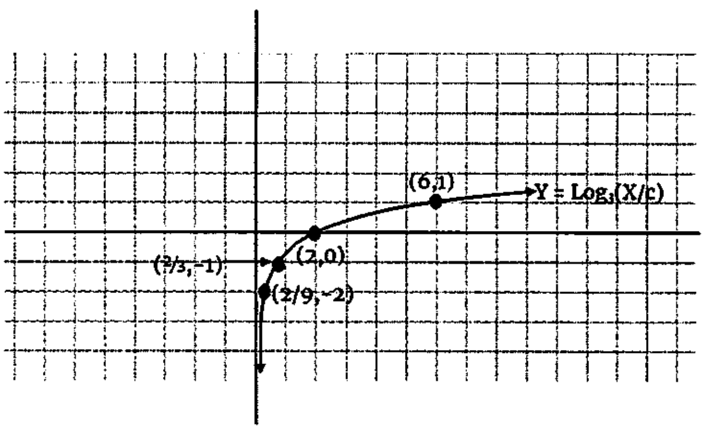
Bentuk di atas bisa ditulis ke dalam ekspresi logaritma sebagaimana dalam persamaan (1.2.15).

Untuk melakukan eksplorasi lebih jauh berikut ini dipaparkan informasi angka-angka yang ada pada tabel 3.3 dengan menambahkan konstanta c = 2 yang dipaparkan pada tabel 3.4 di bawah ini.

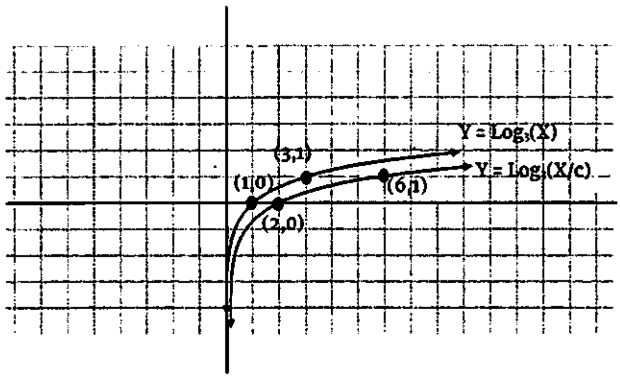
Tabel 1.7.

$Y = \log_a (X/c)$ Untuk a = 3, c = 2	
X	Y
2/27	-3
2/9	-2
2/3	-1
2	0
6	1
18	2
54	3

Jika angka-angka yang dipaparkan dalam tabel 3.6. di atas diplotkan ke dalam sistem sumbu Cartesian, maka akan diperoleh grafik 3.18 berikut ini. Bentuk grafik tersebut secara umum memang tidak ada bedanya dengan grafik fungsi awal yang ada pada gambar 3.11. Hal ini disebabkan karena mereka berasal dari persamaann yang kurang lebih sama. Untuk bisa membedakan bagaimana posisi grafik fungsi awal dibanding dengan grafik fungsi yang termodifkasi, gambar 3.19 berikut ini memaparkan *plotting* keduanya dalam sistem sumbu yang sama.



Gambar 1.21.



Gambar 1.22.

Terlihat dengan jelas pada gambar 3.19. di atas bahwasanya pengaruh munculnya konstanta c, yang dalam hal ini besarnya adalah 2, telah menggeser grafik awal ke arah kanan. Besarnya pergeseran ini bisa dilihat dari titik potong grafik fungsi baru dengan sumbu X yang terletak pada koordnat (2,0). Ini menunjukkan bahwa grafik fungsi yang baru mempunyai titik potong dengan sumbu X yang jaraknya dari titik pangkal, (0,0), adalah 2 kali lipat dari grafik fungsi lama. Titik-titik yang lain dalam domain keduanya juga mengikuti. Hal ini salah satunya bisa dilihat pada titik yang mempunyai koordinat (3,1) pada grafik fungsi lama yang ternyata mempunyai padanan pada grafik fungsi baru pada titik (6,1).

2.3.4. Modifikasi Lain

Pembahasan mengenai modifikasi dengan memunculkan konstanta c tidak hanya berhenti dengan *plotting* (menggambarkan) grafik fungsi yang dimodifikasi saja. Atau, dengan memberikan pemahaman mengenai posisi masing-masing ketika mereka diplot secara berdampingan pada satu sistem sumbu yang sama. Namun, lebih jauh dari itu hal ini mempunyai implikasi analitis yang dalam.

Untuk mengetahui lebih jauh mengenai hal tersebut berikut ini akan dilakuan eksplorasi mengenai bentuk lain dari modifikasi fungsi. Ambillah lagi fungsi logaritma sebagai yang di sajikan pada persamaan (1.2.12) yang setara dengan:

$$X = a^Y$$

Pada pembahasan sebelum ini, modifikasi dilakukan sebagaimana yang ditunjukkan oleh persamaan (1.2.15). Namun pada kesempatan ini modifikasi akan dilakukan dengan cara lain yaitu dengan menambahkan c pada sisi X, sehingga menjadi:

$$a^Y = cX \ldots. \ (1.2.16)$$

Langkah pertama yang perlu ditempuh untuk melakukan *plotting* grafik fungsi di atas adalah dengan mengetahui terlebih dahulu karakteristik fisik dari grafik fungsi di atas. Ada beberapa sifat yang menjadi ciri dari grafik fungsi tersebut. Pertama, fungsi tersebut bersifat asimptotis terhadap sumbu tegak, Y. Hal ini bisa dilihat dari titik potong grafik tersebut dengan sumbu tegak, Y. Untuk mendapatkannya, nilai X harus ditentukan terlebih dahulu yaitu sebesar 0 (nol). Hal ini dilakukan untuk menjamin agar grafik fungsi tersebut memotong sumbu tegak Y.

Selanjutnya, pada nilai X = 0 ini akan dicari nilai Y yang bersesuaian.Untuk itu nilai X ini perlu disubstitusikan ke dalam persamaan (1.2.16) sehingga menjadi:

$$a^Y = 0$$
$$Y = \log_a 0$$
$$Y = \log_a a^{-\infty}$$
$$Y = -\infty$$

Karena ∞ adalah tak terhingga yang bukan merupakan bilangan yang terdefinisi, maka hal ini secara sederhana bisa dikatakan bahwa tidak ada titik potong grafik dengan sumbu tegak, Y. Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa grafik fungsi tersebut bersifat asimptotis terhadap sumbu tegak, Y.

Karakteristik kedua adalah bahwa titik potong dengan sumbu X berada pada koordinat (1/c,0). Hal ini bisa dilihat dengan cara menentukan nilai Y sama dengan nol, sebagai syarat perpotongan grafik dengan sumbu horisontal, X. Pada nilai Y = 0 perlu ditemukan nilai X yang bersesuaian dengan hal itu. Ini bisa dilakukan dengan memasukkan nilai Y = 0 ke dalam persamaan (1.2.16), sehingga diperoleh:

$$a^0 = cX,$$
$$1 = cX,$$
$$X = 1/c$$

Sehingga koordinat titik potong grafik dengan sumbu X adalah (1/c,0).

Karakteristik lainnya adalah bahwa pada saat nilai X sama dengan 1, maka nilai Y akan sama dengan $\log_a c$. Hal ini bisa diperiksa dengan cara memasukkan nilai X = 1 ke dalam persamaan (1.2.16) sehingga diperoleh:

$$a^Y = c,$$
$$Y = \log_a c$$

Karakteristik yang lain adalah jika nilai X sama dengan a, maka besarnya nilai Y adalah:

$$Y = \log_a c + 1$$

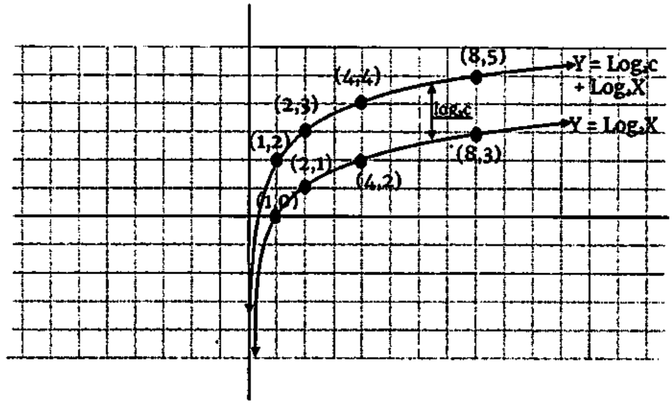
Hal ini bisa ditengarai melalui substitusi nilai X = a ke dalam persamaan (1.2.16), sehingga diperoleh:

$$Y = \log_a c + \log_a a$$
$$Y = \log_a c + 1$$

Untuk melakukan plotting grafik fungsi di atas, berikut ini dihadirkan berbagai bilangan yang darinya bisa membentuk grafik. Bilangan-bilangan tersebut disajikan ke dalam tabel-tabel berikut ini

Table 1.8.(a) $a^Y = X$ untuk a = 2		Table 1.8. (b) $a^Y = cX$ untuk a = 2, c = 4	
X	Y	X	Y
0	-∞	0	-∞
1	0	1	2
2	1	2	3
4	2	4	4
8	3	8	5

Dengan nilai X yang sama yang ada pada kedua panel dari tabel di atas, bisa diperbandingkan nilai Y dari kedua panel di atas. Perbedaan antara keduanya disebabkan oleh kehadiran konstanta c pada panel (b) tabel di atas. Perbedaan ini akan lebih bisa dipahami jika informasi dari kedua panel di atas diplot ke dalam sistem sumbu yang sama. Berikut ini adalah plotting kedua grafik tersebut.



Gambar 1.23.

Terlihat dalam grafik di atas bahwa perbedaan yang disebabkan karena kehadiran konstanta c pada grafik yang kedua diekspresikan sebagai jarak vertikal antara grafik fungsi awal dan grafik fungsi yang baru. Pada gambar di atas bisa dilihat bahwasanya pada masing-masing nilai X sebarang bersesuaian dengan nilai Y yang lebih tinggi sebesar 2 ($\log_a c$) pada grafik fungsi yang baru.

Dari berbagai situasi yang dipaparkan di atas, kehadiran konstanta c telah mengubah konfigurasi grafik awal. Kehadiran konstanta c ini juga mempunyai implikasi yang berbeda-beda bergantung pada bentuk fungsi awal. Dengan demikian, penafsiran terhadap konstanta c juga berbeda-beda menurut bentuk fungsi yang ada. Namun demikian terdapat kesamaan makna dari kehadiran konstanta c tersebut yang tidak mempedulikan bentuk fungsi awalnya; Apapun bentuk fungsi awalnya, kehadiran konstanta c dalam fungsi-fungsi tersebut mempunyai makna yang sama sebagaimana disajikan di bawah ini.

Pemaknaan Umum Konstanta c,

Konstanta c menunjukkan besarnya Y ketika nilai X sama dengan satu

2.4. Pemakaian dalam Model Ekonomi dan Bisnis

Sebagaimana disajikan di depan bahwasanya fungsi pangkat dan fungsi logaritma menduduki posisi yang penting dalam ekonomi. Ini disebabkan banyak kasus dalam ekonomi bisa didekati dan diselesaikan dengan kedua jenis fungsi tersebut. Sebagai ilustrasi adalah contoh- contoh berikut ini.

Contoh 1.8.

Seseorang mendepositokan uangnya sebanyak Rp 100.000.000.^{00} ke dalam bank dengan memperoleh bunga tetap tiap bulannya sebesar 1.4%. Jika dia mengharapkan uangnya bisa berkembang menjadi Rp 150.000.000.^{00} berapa lama dia harus menunggu untuk itu (jika formula bunga majemuk adalah $F = C(1+r)^t$, r adalah tingkat bunga dan t adalah waktu)?

Penyelesaian:

Untuk menemukan nilai t (waktu menunggu), maka semua informasi yang ada perlu dimasukkan ke dalam formula yang ditetapkan di atas, sehingga:

$$150000000 = 100000000(1 + 0.014)^t$$
$$150000000/100000000 = (1 + 0.014)^t$$
$$1.5 = (1 + 0.014)^t$$
$$\log(1.5) = t \log(1 + 0.014)$$
$$0.1761 = 0.006038\ t$$
$$t = 0.1761/0.006038$$
$$t = 29.1623$$

Jadi lama waktu menunggu untuk memperoleh sejumlah uang yang dimaksud di depan adalah 29 bulan.

Contoh 1.9.

Seseorang berniat mendepositokan uangnya sebesar Rp 100.000.000.^{00} ke suatu bank dalam jangka waktu 2,5 tahun. Dia mengenakan ketentuan bahwa dalam waktu itu (di akhir masa deposito) jumlah total uang yang diperoleh, deposito pokok dan bunganya, minimal 150.000.000.^{00}. Agar bisa terpenuhi keinginannya, pada bank yang menawarkan tingkat bunga minimal berapa (bunga bulanan) dia menempatkan uangnya?

Penyelesaian:

Tentukan saja jumlah uang yang harus diperoleh pada jangka waktu yang dimaksudkan adalah 150.000.000.^{00}. Selain itu jangka waktu 2,5 tahun yang ditentukan perlu diubah terlebih dahulu dalam bentuk bulan agar sesuai dengan bunga bulanan. Dalam hal ini jangka waktu tersebut sama dengan 30 bulan. Sesudah itu, semua informasi yang ada perlu dimasukkan ke dalam rumus di atas, sehingga:

$$150000000 = 100000000(1 + r)^{30}$$
$$150000000/100000000 = (1 + r)^{30}$$
$$1{,}5 = (1 + r)^{30}$$
$$\log(1.5) = 30 \log(1 + r)$$
$$0.1761 = 30 \log(1 + r)$$
$$0.1761/30 = \log(1 + r)$$
$$0.00586971 = \log(1 + r)$$

Untuk menyeleseaikan lebih lanjut, langkah yang perlu diambil adalah dengan mengubah ruas kiri menjadi bentuk logaritma kembali, yaitu:

$\text{Log}(1.013607) = \log(1 + r)$	**Ingat,**
$(1.013607) = (1 + r)$	**Log(1.013607) =**
$r = 1.013607 - 1$	**0.00586971**
$r = .013607$	

Jadi orang tersebut di atas perlu mencari bank yang mau memberikan tingkat bunga minimum 1,3607% per bulan.

Contoh 1.10.

Suatu perusahaan mempunyai catatan data mengenai biaya dan pendapatan yang darinya bisa disusun dalam suatu fungsi berikut ini.

Pendapatan Total (TR): $Y = 2X$,

Biaya Total (TC): $Y = 2^X$,

Berdasar pada kedua fungsi di atas lakukanlah hal-hal berikut ini:

a. Carilah fungsi keuntungannya
b. Temukan pada unit ke berapa perusahaan tersebut mengalami Break-even?
c. Gambarkan grafiknya

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi atau pengertian umum mengenai keuntungan bisa dipahami bahwa keuntungan adalah merupakan kelebihan dari pendapatan atas biaya. Hal ini secara aljabar bisa diekspresikan sebagai berikut:

$$\Pi = TR - TC$$

di mana Π adalah keuntungan, TR dan TC, secara berturut-turut, adalah pendapatan total dan biaya total.

Dengan definisi seperti di atas maka informasi fungsi yang disebut di muka perlu dimasukkan ke dalam persamaan di atas sehingga diperoleh:

$$\Pi = 2X - 2^X$$

Ekspresi di atas merupakan fungsi keuntungan dan sudah dalam bentuk aljabar yang selanjutnya bisa diselesaikan secara aljabar pula.

Selanjutnya berdasar definisi mengenai kondisi *break-even* adalah jika keuntungan, Π, adalah nol. Untuk itu jika nilai nol untuk keuntungan ini disubstitusikan ke dalam fungsi di atas maka diperoleh:

$$0 = 2X - 2^X \text{ atau:}$$
$$2X = 2^X$$

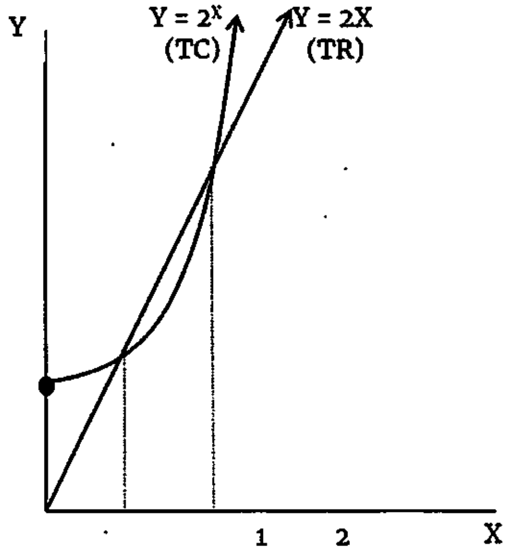
Karena dalam ekspresi fungsi di atas terdapat bentuk pangkat, maka diperlukan mengenakan logaritma pada kedua ruas di atas, yaitu:

$$\mathrm{Log}_2\, 2X = X$$
$$\mathrm{Log}_2\, 2 + \mathrm{Log}_2\, X = X$$
$$1 + \mathrm{Log}_2\, X = X, \text{ atau}$$
$$X = 1 + \mathrm{Log}_2\, X$$

Dari ekspresi persamaan di atas bisa ditemukan secara langsung nilai X, yaitu:

$$X_1 = 1 \text{ dan } X_2 = 2$$

Untuk melakukan pemeriksaan mengenai kebenaran nilai-nilai X yang disebut di muka, bisa dilakukan dengan memasukkan nilai-nilai X tersebut satu persatu dan bisa langsung dilihat bahwa kedua nilai X tersebut memenuhi persamaan di atas. Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa kondisi *break-even* tercapai pada jumlah produksi sebesar 1 dan 2. Asumsikan di sini bahwa unit yang dipakai bukannya satuan tetapi adalah lot yang menunjukkan jumlah yang besar.



Gambar 1.24.

Contoh 1.11.

Sebuah negara menghadapi permasalahan kependudukan terkait dengan penyediaan pangan. Konsumsi bahan pangan mengalami pertumbuhan tepat sesuai dengan pertumbuhan jumlah penduduk. Di lain pihak negara yang bersangkutan juga mengalami pertumbuhan jumlah produksi pangan. Berikut ini adalah ekspresi fungsi dari konsumsi pangan dan produksi bahan pangan.

$$\text{PM: } Y = \tfrac{1}{2}t$$
$$\text{KM: } (2^Y) = t$$

di mana PM adalah produksii bahan pangan; KM adalah konsumsi bahan pangan; t adalah waktu.

Demi melakukan perencanaan yang teratur, negara tersebut berusaha untuk mengetahui pada periode mana negara tersebut mengalami surplus bahan pangan (kelebihan produksi dibanding konsumsi) dan pada periode mana negara tersebut mengalami defisit (kekurangan produksi dibanding konsumsi).

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal ini diperlukan terlebih dahulu menentukan strategi yang seperti apa yang perlu ditempuh. Dalam hal ini menguji semua titik waktu (t) yang ada untuk mengetahui apakah pada waktu yang bersangkutan produksi mengalami surplus atau defisit adalah suatu cara yang sangat tidak praktis. Strategi yang perlu ditempuh adalah dengan mengidentifikasi kondisi impas (kondisi di mana jumlah produksi dan jumlah konsumsi adalah tepat sama). Jika titik ini sudah diketahui maka selebihnya bisa diketahui secara langsung rentang di mana negara tersebut mengalami surplus atau defisit.

Sebelum melangkah, hal yang pertama kali perlu dilakukan adalah melakukan modifikasi atas persamaan KM yang asli karena ekspresi yang ada belum menunjukkan bentuk fungsi yang lazim. Untuk itu ekspresi fungsi KM di atas perlu ditulis kembali dalam bentuk lain yang tidak mengubah nilai dan maknanya menjadi:

$$(2^Y) = t$$
$$\text{KM: } Y = \log_2 t$$

Langkah kedua adalah dengan mencari titik-impas di mana PM sama dengan KM. Untuk itu langkah ini diwujudkan dalam menyamakan kedua persamaan di atas sehingga:

$$\log_2 t = \tfrac{1}{2}t$$

Dari pemeriksaan langsung bisa diperoleh nilai-nilai t yang memenuhi persamaan di atas, yaitu:

$$t_1 = 2;\ t_2 = 4$$

Untuk memeriksa kebenaran dari nilai t yang diperoleh bisa dilakukan dengan memasukkan masing-masing nilai ke dalam persamaan terakhir di atas.

Untuk $t = 2$,

$$\log_2 2 = \tfrac{1}{2}\,2$$
$$\log_2 2 = 1 \text{ (benar)}$$

Sehingga nilai $t = 1$ yang ditemukan di atas memenuhi persamaan terakhir di atas

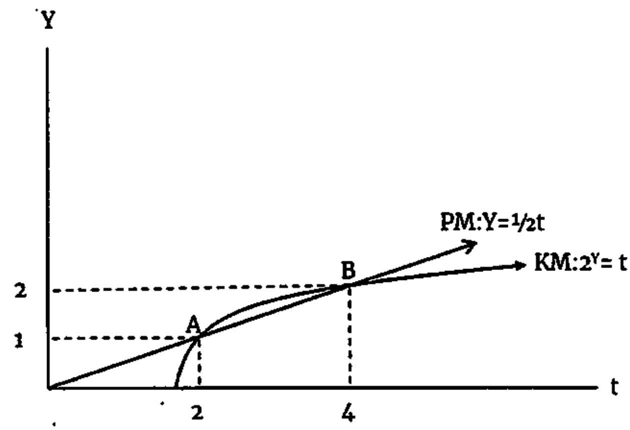
Untuk $t = 4$,

$$\log_2 4 = \tfrac{1}{2}\,4$$
$$\log_2 4 = 2$$
$$\log_2 2^2 = 2 \text{ (benar)}$$

Sehingga nilai $t = 2$ yang ditemukan di atas juga memenuhi persamaan terakhir di atas.

Dengan demikian, titik waktu di mana negara yang bersangkutan mengalami impas antara jumlah produksi pangan dan jumlah konsumsi pangan adalah t =2 dan t = 4.

Untuk memperjelas penyelesaian di atas di bawah ini disajikan grafik mengenai hal ini.



Gambar 1.25.

Dari penyajian gambar di atas terlihat bahwa terdapat dua titik impas yaitu titik A dengan koordinat (2,1) dan titik B dengan koordinat (4,2). Pada kedua titik tersebut baik produksi bahan makan dan konsumsi pangan adalah tepat sama sehingga tidak terjadi surplus maupun defisit. Pada rentang di mana besarnya t kurang dari 2, atau di sebelah kiri titik A, produksi bahan pangan mengalami surplus. Hal ini bisa dilihat pada grafik PM yang selalu berada di atas grafik KM. Pada rentang antara titik A dan titik B produksi bahan pangan mengalami defisit. Pada rentang ini grafik menunjukkan bahwa KM selalu berada di atas PM. Selanjutnya pada rentang di setelah titik B, atau di sebelah kanan titik B, grafik PM selalu berada di atas grafik KM yang berarti bahwa produksi pangan kembali mengalami kelebihan (surplus) dibanding dengan konsumsi pangan.

3. Analisis Keuntungan Maksimum Monopolis

Masalah monopoli telah menjadi perhatian sentral bagi para ekonom. Hal ini disebabkan pada kondisi seperti ini monopolis akan memperoleh rente ekonomi yang sangat besar sementara pada sisi lain masyarakat umum, yang terdiri dari konsumen, dirugikan dalam jumlah yang banyak. Oleh karena itu ekonom merasa perlu untuk mengetahui perilaku monopoli ini. Sebagai ilustrasi marilah kita ambil lagi kasus perusahaan "Saturnus" dan Bambang sebagai konsumen setianya. Dalam kasus ini "Saturnus" berperan sebagai monopolis. Sebagai catatan "Saturnus" mempunyai fungsi pendapatan marjinal (MR) sebagai berikut:

$$MR = -2Q + 80$$

Dengan situasi seperti ini maka selidikilah hal-hal berikut ini:

1. Pada unit output ke berapa "Saturnus" mencapai keuntungan yang maksimum
2. Pada output tersebut berapa biaya rata-rata yang terjadi?
3. Pada output tersebut berapa harga yang dikenakan
4. Berapa keuntungan maksimum tersebut?

Penyelesaian:

Untuk mencari penyelesaian dari masalah ini perlu melihat konsep yang ada dalam ekonomi mikro mengenai keuntungan maksimum. Dalam konsep ekonomi mikro keuntungan yang maksimum akan bisa dicapai pada tingkat output di mana biaya marginal (*Marginal cost/* MC) sama dengan pendapatan marjinal (*Marginal Revenue/*MR). Sebenarnya hal ini diambil dari konsep maksimisasi fungsi. Untuk melakukan hal ini langkah-langkah yang diambil dalam penyelesaian masalah ini bisa dilihat pada pembahasan berikut ini.

$$MC = MR$$

Dengan memasukkan masing-masing persamaan MC dan MR yang telah diketahui maka:

$$\frac{1}{8}Q^2 - 2Q + 8\frac{1}{4} = -2Q + 80$$

Dengan menambah kedua ruas dengan 2Q, maka diperoleh:

$$\frac{1}{8}Q^2 + 8\frac{1}{4} = 80$$

Selanjutnya dengan mengurangi kedua ruas dengan bilangan $8\frac{1}{4}$ maka diperoleh:

$$\frac{1}{8}Q^2 = 71\frac{3}{4}$$
$$Q^2 = 574$$
$$Q = 2.958$$

Dengan demikian jumlah produksi yang bisa menghasilkan keuntungan maksimum adalah 23.958 lot atau 23,958 unit.

1. Untuk mengetahui besarnya biaya rata-rata pada output tersebut, maka teknik yang harus ditempuh adalah dengan mensubstitusikan nilai Q tersebut ke dalam persamaan biaya rata-rata. Adapun persamaan biaya rata-rata sudah diketahui dalamcontoh 1.4. di depan, sehingga besarnya biaya rata-rata adalah:

$$AC = \frac{1}{24}(23.958)^2 - 23.958 + 8\frac{1}{4}$$
$$\text{AC} = 8.208$$

2. Untuk melacak pada harga berapa "Saturnus" mengenakan pada Bambang, maka perlu dilihat melalui fungsi permintaan. Tepatnya berapakah harga yang bertepatan dengan level output yang menghasilkan keuntungan maksium tersebut? Untuk emenemukan hal ini maka perlu mensubstitusikan output ke dalam fungsi permintaan Bambang (dari contoh 1.7):

$$\text{P} = -\text{Q} + 80$$
$$\text{P} = -23.958 + 80$$
$$\text{P} = 56.042$$

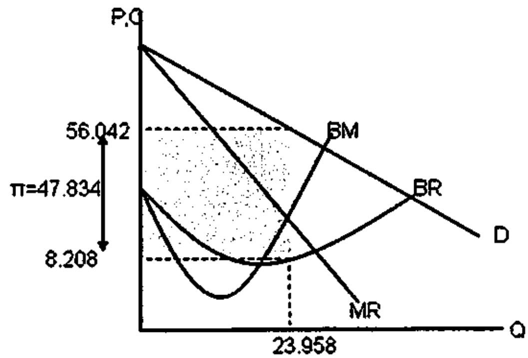
3. Untuk mengetahui besarnya keuntungan maksimum maka perlu diketahui terlebih dahulu besarnya keuntungan per lot. Hal ini bisa diketahui melalui definsi dari keuntungan rata-rata yaitu:

$$\pi = P - AC$$
$$\pi = 56.042 - 8.208$$
$$\pi = 47.834$$

Figure yang didapatkan di atas adalah merupakan keuntungan rata-rata per lot. Adapun jumlah yang terjual (Q) adalah sebesar

23.958 lot. Dengan demikian keuntungan maksimum bisa diperoleh dengan cara mengalikan keuntungan rata-rata per lot, π, dengan jumlah yang terjual, Q. Dari sini bisa diketahui besarnya keuntugan maksimum yaitu sebanyak: 1145.05

4. Gambar grafik.



Gambar 1.26.

II

DERIVATIF DAN ANALISIS GEOMETRIK

Pada bab V disajikan teknik-teknik untuk menemukan derivatif dari suatu fungsi. Di sana juga diberikan pemaknaan ekonomi terhadap derivatif. Namun, penggunaan derivatif dalam area ekonomi tidak sebatas yang telah disampaikan di depan saja. Justru, pada bab-bab berikut ini akan dilakukan eksplorasi lebih lanjut untuk mengetahui penerapan derivatif pada area ekonomi, salah satunya adalah analisis geometrik.

Dalam melakukan analisis atas berbagai fenomena ekonomi, pendekatan yang biasa digunakan adalah pendekatan model. Salah satu bentuk model yang bisa digunakan untuk hal ini adalah grafik. Sementara itu, analisis atas suatu grafik akan memperoleh dukungan yang sangat kuat jika dilakukan dengan menggunakan analisis geometri. Analisis geometri ini pada tingkat lanjut tidak bisa dilakukan kecuali dengan bantuan derivatif. Sebagai gambaran, pada bab sebelumnya telah dikatakan bahwa derivatif menunjukkan angka arah atau kemiringan dari suatu fungsi.. Pada kesempatan ini akan dilakukan eksplorasi lebih dalam untuk mengetahui kaitan antara derivatif dengan arah pergerakan grafik dan juga berbagai analisis grafis yang lain.

1. Makna Derivatif

Untuk memulai, lihat lagi di depan bahwa derivatif diartikan sebagai tingkat perubahan sesaat. Secara umum diketahui bahwa sesuatu, apapun dia, yang mengalami perubahan dengan tingkat perubahan yang positif maka dia bergerak naik/meningkat. Begitu juga sebaliknya, jika dia berubah dengan tingkat perubahan yang negatif maka berarti dia bergerak turun. Dengan demikian tingkat perubahan yang ditunjukan oleh nilai derivatif menunjukkan arah pergerakan dari grafik fungsi. Secara spesifik bisa dikemukakan suatu patokan bahwa:

$\frac{dY}{dX} > 0$, maka arah grafik dari fungsi tersebut naik ....(2.33)

$\frac{dY}{dX} = 0$, maka grafik dari fungsi tersebut berada dalam kondisi stasioner (tidak naik ataupun turun) ....(2.34)

$\frac{dY}{dX} < 0$ maka arah grafik dari fungsi tersebut turun ....(2.35)

Dengan ditemukannya ketentuan seperti di atas, maka dia bisa berperan sebagai alat untuk mengidentifikasi posisi dari ekstremum suatu fungsi. Hal ini bisa diawali dengan memeriksa apakah nilai derivatif adalah konstan atau berubah ukurannya sedemikian rupa sehingga mengalami perubahan tanda dari positif menjadi negatif atau sebaliknya. Jika nilai derfivatif mengikuti pola yang kedua maka fungsi yang bersanguktan mengalami pembalikan. Adapun pembalikan ini berada tepat pada titik balik. Titik balik tersebut berperan sebagai batas dari pergerakan naik dari grafik dengan pergerakann turun. Tepat pada titik balik yang merupakan batas ini posisi grafik tidak naik ataupun tidak turun, melainkan stationer. Hal tersebut terjadi bertepatan dengan titik balik dari nilai derivatif dari positif menjadi negatf atau sebalikya. Sudah diketahui semua bahwa titik balik dari positif menjadi negatif atau sebaliknya tidak lain adalah batas antara positif dan negatif yang tidak lain adalah 0 (nol). Dengan demikian ketika nilai derivatf adalah 0 (nol) maka grafik fungsi berada dalam posisi statsioner. Hal ini berarti bahwa pada ketika itu nilai fungsi mencapai ekstremum. Hal ini melengkapi karakteristik dari grafik fungsi yang bisa ditelusuri melalui nilai derivatif.

Untuk memberi pemahaman yang lebih baik berikut ini diberikan contoh-contoh sebagai ilustrasi.

Contoh 2.24.

Lihatlah fungsi berikut ini.

$$Y = 3X^2 - 12X + 8$$

Carilah:

a. Derivatif dari fungsi di atas
b. Pada X = 1 dan X = 3, ke mana arah grafik (naik atau turun)?
c. Temukan pada nilai X di mana grafik mencapai ekstremum

Penyelesaian:

a. Dervatif

$$\frac{dY}{dX} = 6X - 12$$

Jika derivatif di atas dievaluasi pada X = 1, maka:

b. Pada X = 1,

$$\frac{dY}{dX} = 6X - 12$$
$$= -6 \text{ (negatif)}$$

Dengan demikian maka pada nilai X = 1, maka arah pergerakan grafik adalah turun.

Jika derivatif di atas dievaluasi pada X = 3, maka:

$$\frac{dY}{dX} = 6X - 12$$
$$= 6(3) - 12$$
$$= 6 \text{ (positif)}$$

Dengan demikian maka pada nilai X = 3, maka arah pergerakan grafik adalah naik

c. Titik Ekstremum

Syarat bagi fungsi mencapai ekstremum adalah:

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

Dengan demikian

$$6X - 12 = 0$$
$$X = 2$$

Ordinat ekstremum:

Untuk memperoleh nilai fungsi pada ekstremum, maka hasil nilai X pada ekstremum di atas, X = 2, perlu disubstitusikan masuk ke dalam fungsi di atas, sehingga:

$$Y = 3(2)^2 - 12(2) + 8$$
$$Y = -4$$

Dengan demikian titik ekstremum berada pada (2,-4)

Bandingkan prosedur di atas dengan yang ada pada **Bab III**..(???) dalam hal memperoleh titik ekstremum. Prosedur mana yang lebih mudah?

Contoh 2.25.

Lihatlah fungsi berikut ini.

$$\frac{dY}{dX} = -1{,}5X + 4{,}5$$

Carilah:

a. Derivatif dari fungsi di atas
b. Pada X = 2 dan X = 4, ke mana arah grafik (naik atau turun)?
c. Temukan pada nilai X di mana grafik mencapai ekstremum

Penyelesaian:

a. Dervatif

$$\frac{dY}{dX} = -1{,}5X + 4{,}5$$

b. Jika derivatif di atas dievaluasi pada X = 2, maka:

$$\frac{dY}{dX} = -1{,}5(2) + 4{,}5$$
$$= 1{,}5 \text{ (positif)}$$

Dengan demikian maka pada nilai X = 2, maka arah pergerakan grafik adalah naik

Jika derivatif di atas dievaluasi pada X = 4, maka:

$$\frac{dY}{dX} = -1{,}5(4) + 4$$

Dengan demikian maka pada nilai X = 4, maka arah pergerakan grafik adalah turun.

c. Titik Ekstremum

Syarat bagi fungsi mencapai ekstremum adalah:

$$\frac{dY}{dX} = 0$$

Dengan demikian,

$$-1{,}5X + 4{,}5$$
$$X = 3$$

Ordinat ekstremum:

Untuk memperoleh nilai fungsi pada ekstremum, maka hasil nilai X pada ekstremum di atas, X = 3, perlu disubstitusikan masuk ke dalam fungsi di atas, sehingga:

$$Y = -0{,}75(3)^2 + 4{,}5(3) + 16$$

$$Y = 22{,}75$$

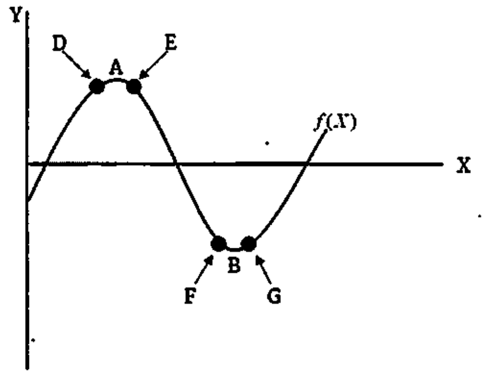
Dengan demikian koordinat titik ekstremum berada pada $(3, 22\frac{3}{4})$

2. Jenis Ekstremum

Tititk ekstremum merupakan faktor penting dalam usaha untuk mengkonstruksikan grafik secara keseluruhan. Secara lebih khusus bisa dikatakan bahwa titik ekstremum mempunyai peran sebagai indikator mengenai posisi di mana grafik berbalik arah: dari bergerak naik menjadi bergerak turun atau sebaliknya. Pada analisis ekonomi, mengetahui posisi titik ekstremum ini menjadi sangat penting, misalnya dalam fungsi keuntungan dia akan memberikan informasi mengenai pada jumlah output berapa perusahaan yang bersangkutan mencapai keuntungan yang maksimum.

2.1. Pentingnya Identifikasi Jenis Ekstremum

Titik ekstremum yang dibahas di depan walaupun sudah bisa memberikan informasi mengenai posisi dari titik balik, namun masih ada satu hal yang perlu memperoleh kepastian yaitu apakah grafik fungsi tersebut berbalik dari bergerak naik menjadi bergerak turun ataukah mingkin yang sebaliknya. Oleh karenanya hal tersebut perlu memperoleh kepastian terlebih dahulu agar bisa digunakan untuk mengkonstruksikan suatu gafik fungsi. Hal ini demikian karena grafik dari fungsi kuadrat atau fungsi polinom dengan derajad yang lebih tinggi mensyaratkan untuk mengetahui jenis ekstremum yang diperoleh. Untuk mengetahui arti pentingnya masalah ini pandanglah grafik fungsi berikut ini.



Gambar 2.12.

Fungsi di atas mempunyai dua buah titik ekstremum yang bisa diidentfkasi pada titik A dan titik B. Titk A menunjukkan titik di mana grafik berbalik arah dari bergerak kė atas menjadi bergerak ke bawah. Dengan konstruksinya seperti yang bisa dilihat pada Gambar3.12 di atas, maka bisa dikatakan bahwa grafik mencapai maksimum. Sementara titik ektremum yang dicapai pada titik B merupakan kasus yang sebaliknya.

Usaha untuk memastikan jenis ekstremum ini, seperti yang ada pada titik A atau titik B menjadi sangat penting. Hal ini demikian karena kesalahan identifikasi mengenai hal ini akan berakibat sangat serius. Dalam area ekonomi, kesalahan identifikasi ini bisa berakibat fatal. Anggaplah bahwa $f(X)$ di atas merupakan fungsi keuntungan yang setiap perusahaan berusaha untuk memaksimumkannya. Usaha pemaksimuman di sana dilakukan dengan cara mencari posisi titik maksimum dari grafik fungsi di atas. Jika usaha tersebut hanya berpedoman pada derivatif yang menentukan posisi titik ekstremum saja maka dia tidak bisa membedakan titik A, yang mempunyai sifat maksimum, dari titik B yang mempunyai sifat minimum. Dalam situasi seperti ini sangat mungkin perusahaan tersebut keliru menentukan titik B yang merupakan posisi dari keuntungan minimum kemudian dianggap sebagai keuntungan yang maksimum. Tentu saja hal ini merupakan kekeliruan yang tidak bisa ditolerir karena perusahaan bisa bangkrut karenanya. Untuk itu perlu dipastikan jenis ekstremum sebelum melangkah pada analisis selanjutnya.

2.2. Identifikasi melalui Titik-titik Tetangga

Dengan melihat sifat yang didiskusikan di muka maka jelas di sini bahwa mengetahui titik ekstremum saja belum cukup. Namun, lebih dari itu perlu usaha tambahan untuk mengetahui jenis ekstremum yang ditemukan.yaitu dengan mengetahui jenis ekstremum. Dengan diketahuinya jenis ekstremum maka bisa dibedakan mana yang maksimum dan mana yang minimum sehingga tidak sampai terjadi kesalahan dalam bentuk ekstremum maksimum dianggap sebagai minimum atau sebaliknya..

Untuk melakukan identifikasi, maka hal ini bisa dilakukan dengan mengevaluasi titik-titik di sekitar titik ekstremum: ambil satu di sebelah kiri dan satu lagi di sebelah kanan. Jika ditentukan titik A (dalam Gambar 1.12) dan diambil dua titik yang bertetangga dekat dengan titik A, satu di sebelah kiri dan satu lagi di sebelah kanan. Terlihat di sana bahwa di titik D grafik bergerak naik, karena nilai derivatif di titik itu bertanda positif, dan di titik E grafik bergerak turun, karena nilai derivatif di titik itu bertanda negaitif. Dari sini seseorang akan bisa dengan mudah mengkonstruksikan bentuk grafiknya. Jika sebuah grafik bergerak naik (titik D) kemudian stasioner (titik A) dan bergerak turun (titik E) maka bentuknya adalah menutup ke bawah dengan satu puncak di titik ekstremum. Dengan demikian bisa dikatakan dengan tegas bahwa jenis ekstremumnya adalah maksimum. Prosedur yang sama bisa dikenakan pada titik B. Pada titik tetangga terdekatnya di sebelah kiri, yakni titik F, nilai derivatif adalah negatif yang berarti grafik bergerak ke bawah. Pada titik B grafiknya stationer dan pada titik G grafiknya ergerak ke atas. Dari sini kemudian bisa disimpulkan bahwa jenis ekstremumnya adalah minimum.

Untuk memberikan gambaran yang kongkrit, ambil kembali di sini fungsi yang ada pada Contoh 2.24. Di depan sudah ditemukan bahwa titik ekstremum diperoleh ketika nilai $X = 2$. Sekarang di sini akan diperiksa jens dari ekstremum tersebut dengan cara yang telah dipaparkan di muka. Untuk memulai kita ambil dua buah titik yang ertetangga dekat dengan titik ekstremum yaitu titik yang mempuyai nilai $X = 1{,}9$ dan $X = 2{,}1$.

Pada X = 1,9, nilai derivatifnya adalah:

$$\frac{dY}{dX} = 6(1,9) - 12$$

$$\frac{dY}{dX} = 6(1,9) - 12$$

Dengan demikian grafik bergerak ke bawah.
Pada X = 2,1, nilai derivatifnya adalah:

$$\frac{dY}{dX} = 6(2,1) - 12$$

$$\frac{dY}{dX} = 0,6 \text{ (positif)}$$

Dengan demikian grafik bergerak ke atas.

Dari sini bisa dilihat bagaimana pergerakan grafik pada sekitar nilai ekstremumnya. Pada daerah sebelum titik ekstremum grafik bergerak turun dan setelah melewati titik ekstremum grafik bergerak berbelok arah menjadi naik. Dengan demikian bisa dikonstruksikan bahwa bentuk dari grafik fungsi tersebut adalah membuka ke atas seperti mangkuk dengan nilai minimum pada bagian terbawahnya. Hal ini memberikan arti bahwa jenis ekstremumnya adalah minimum.

Selanjutnya akan diperiksa fungsi yang ada pada contoh 2.25. untuk mengetahui jenis ekstremnya.

Pada X = 2,9, nilai derivatifnya adalah:

$$\frac{dY}{dX} = 1,5(2,9) + 4,5$$

$$\frac{dY}{dX} = 0,15 \text{ (positif)}$$

Dengan demikian grafik bergerak keatas.

Pada X = 3,1, nilai derivatifnya adalah:

$$\frac{dY}{dX} = - 1,5(3,1) + 4,5$$

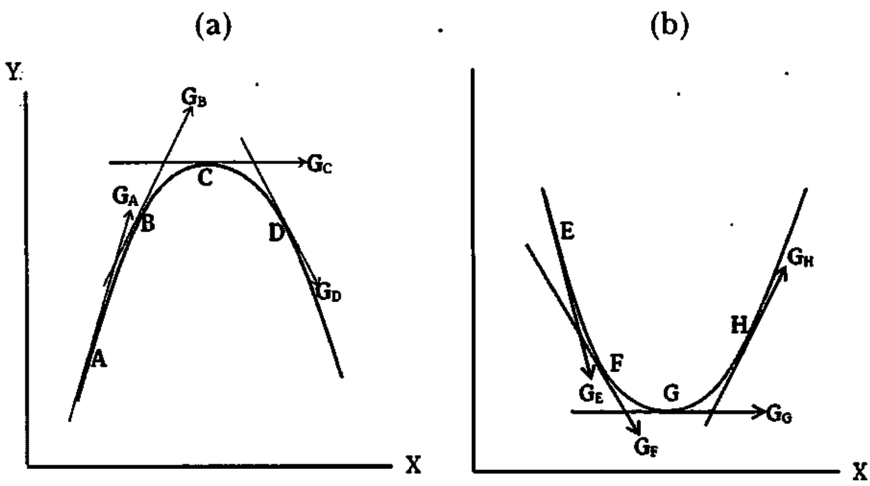
$$\frac{dY}{dX} = - 0,15 \text{ (positif)}$$

Dengan demikian grafik bergerak kebawah. Dengan cara yang sama seperti yang dilakukan sebelumnya, di sini bisa disimpulkan bahwa grafik dari fungsi tersebut berbentuk mangkuk terbalik dengan satu nilai tertinggi di puncaknya. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa jenis ekstremum dari fungsi tersebut adalah maksimum.

2.3. Identifikasi melalui Derivatif Kedua

Penggunaan teknk pengujian titik-titik di sekitar ekstremum dilakukan dengan menempuh beberapa tahap yang membutuhkan kecermatan. Karena itu berikut ini akan dipaparkan teknik lain yang lebih menghemat waktu. Teknik yang dimaksudkan adalah dengan menggunakan derivatif order kedua untuk memeriksa jenis ekstremum.

Sebelum melangkah lebih jauh berikut ini akan disajikan diskusi mengenai pemaknaan terhadap derivatif order kedua. Gambar berikut ini memaparkan konsep tersebut.



Gambar 2.13.

Pada panel (a) dan panel (b), bisa dilihat beberapa garis singgung (*tangent*) yang merupakan kemiringan (*slope*) grafik pada masing-masing titik. Pada panel (a) terlihat bahwa pergerakan dari titik A sampai dengan titik D menunjukkan adanya perubahan kemiringan grafik (*slope*). Pada titik A kemiringan (*slope*) grafik adalah positif dan mempunyai ukuran yang besar. Ketika bergerak ke titik B, kemiringan (*slope*) grafik mengalami perubahan menjadi lebih kecil. Proses penurunan kemiringan (*slope*) grafik ini terjadi secara terus menerus hingga pada titik C kemiringan (*slope*) grafik menjadi 0 (nol). Bahkan selepas dari titik C kemiringan (*slope*) grafik telah berubah menjadi negatif dan terus mengalami penurunan sekalipun pada titik D.

Pada panel (b) hal yang sebaliknya terjadi. Pada titik E kemiringan (*slope*) grafik yang ditunjukkan oleh garis singgung G_E adalah negatif dengan nilai absolut yang besar. Pergerakan ke arah titik F menyebabkan kemiringan (*slope*) grafik mengalami peningkatan. Seterusnya proses tersebut terus terjadi dan kemiringan (*slope*) grafik mengalami peningkatan terus menerus hingga pada titik G kemiringan (*slope*) grafik menjadi 0 (nol). Selepas titik G, kemiringan (*slope*) grafik berubah menjadi positif dan terus mengalami peningkatan tidak terkecuali pada titik H.

Pemaparan yang disampaikan di atas menunjukkan proses yaitu proses perubahan ukuran kemiringan (*slope*) grafik. Dari titik A ke titik C, pada panel (a), telah terjadi perubahan ukuran kemiringan (*slope*) dengan ukuran tertentu. Perubahan ini jika dibagi dengan perubahan dari X, ΔX, yang menjadi penyebabnya maka diperoleh tingkat perubahan rata-rata dari kemiringan (*slope*), yang bisa disimbolkan sebagai berikut ini:

$$\frac{\Delta(\text{slope})}{\Delta X}$$

Karena kemiringan (*slope*) grafik adalah $\left(\frac{dY}{dX}\right)$ maka ekspresi di atas bisa dituliskan kembali dengan mengganti ekspresi kemiringan (*slope*) sebagai berikut ini.

$$\frac{\Delta\left(\frac{dY}{dX}\right)}{\Delta X}$$

Jika besarnya ukuran perubahan dari kemiringan (*slope*) ini terjadi dengan ukuran yang sangat kecil hingga mendekati 0 (nol) maka diperoleh nilai derivatif dari kemiringan (*slope*) sebagai berikut ini.

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{dY}{dX}\right)}{\Delta X}$$
$$= \frac{d\left(\frac{dY}{dX}\right)}{dX}$$

$$= \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dY}{dX}$$

$$= \frac{d^2Y}{dX^2}$$

Ekspresi terakhir di atas adalah merupakan derivatif order kedua dari fungsi.

Dengan demikian proses perubahan kemiringan (*slope*) yang disajikan pada gambar di atas bisa ditunjukkan oleh derivatif order kedua. Pada panel (a) gambar di atas menunjukkan proses perubahan kemiringan grafik yang negatif. Hal ini dikatakan demikian karena dalam proses tersebut besarnya kemiringan (*slope*) mengalami penurunan. Pada panel (b), proses perubahan kemiringan (*slope*) grafik yang terjadi adalah positif karena dalam proses tersebut besarnya kemiringan (*slope*) grafik terus mengalami peningkatan. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa:

$\frac{d^2Y}{dX^2} < 0$, terjadi pada panel (a).

$\frac{d^2Y}{dX^2} > 0$, terjadi pada panel (b).

Padahal, dengan melihat pada gambar di atas maka bisa diambil kesimpulan bahwa panel (a) menunjukkan ekstremum yang maksimum sementara panel (b) menunjukkan ekstremum yang minimum. Dengan demikian secara formal bisa diambil suatu formulasi sebagai berikut:

$\frac{d^2Y}{dX^2}$, ekstremum maksimum.. (2.36)

$\frac{d^2Y}{dX^2}$, ekstremum minimum ....(2.37)

Untuk itu guna mengidentifikasi jenis ekstremum maka cukup dicari derivatif order keduanya. Jika dia negatif maka jenis ekstremumnya adalah maksimum sebaliknya jika dia positif maka jenis ekstremumnya adalah minimum.

Prosedur pemeriksaan jenis ekstremum yang disampaikan di atas secara intuitif tidak berbeda dengan prosedur yang memeriksa hal ini melalui titik-titik tetangga terdekat. Pada Gambar 2.13. yang digunakan sebagai dasar untuk menemukan prosedur pemeriksaan melalui derivatif order kedua, bisa dilihat bahwa titik terdekat di sebelah kiri dari titik A grafik bergerak naik sementara pada titik terdekat di sebelah kanan terlihat grafik bergerak turun. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa jenis ekstremum yang terjadi pada titik A tersebut merupakan maksimum. Demikian juga yang terjadi pada titik G, bisa ditentukan melalui cara ini juga.

Dalam area maksimisasi fungsi, derivatif order pertama digunakan sebagai kondisi/syarat order pertama (*first order condition*) atau biasa juga disebut sebagai syarat perlu (*necessary condition*) sementara derivatif order kedua digunakan sebagai syarat order kedua (*second order condition*) atau disebut juga sebagai kondisi/syarat cukup (*sufficient condition*).

Sebagai ilustrasi ambillah fungsi yang ada pada Contoh 2.24. dan 5.24. Dari sana telusurilah jenis ekstremumnya dengan menggunakan derivatif order kedua.

Dari Contoh 2.24.

$$Y = 3X^2 - 12X + 8$$

$$\frac{dY}{dX} = 6X - 12$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 6 \text{ (positif)}$$

Sehingga jenis ekstremum yang ada adalah minimum

Dari contoh 2.25.

$$Y = -0{,}75X^2 - 4{,}5X + 16$$

$$\frac{dY}{dX} = -1{,}5X + 4{,}5$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 1{,}5 \text{ (positif)}$$

Sehingga jenis ekstremum yang ada adalah maksimum.

3. *Slope*, Pangkat dan Elastisitas

Alat analisis penting dalam ekonomi mikro adalah elastisitas. Dalam konstruksi fungsi tertetu seringkali analis mengalami kesulitas untuk menghitung besarnya elastisitas. Padahal, jika dicermati secara mendalam untuk konstruksi fungsi tertentu elastisitas tersebut mempunyai hubunga yang sangat erat dengan kemiringan grafik (*slope*) dan pangkat. Untuk mengetahui hal ini berikut ini akan dieksplorasi sifat-sifat yag disebutkan di muka.

3.1. *Slope* dan Elastisitas

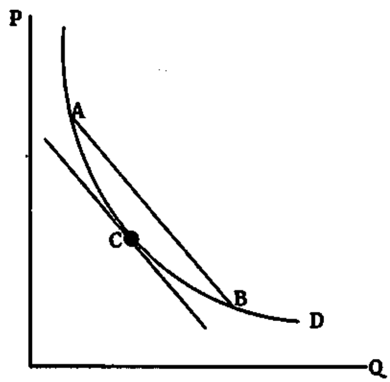
Elastisitas yang paling populer dalam area ekonomi mikro adalah elastisitas harga permintaan (*Price elasticity of demand*). Menurut definisi teknis, elastisitas harga permintaan ini adalah perubahan jumlah barang yang diminta, (Q), dalam prosentase, yang disebabkan oleh perubahan harga, P, dalam prosentase juga. Definisi teknis ini bisa diekspresikan dalam bentuk aljabar berikut ini.

$$E_P = \frac{\Delta Q}{Q} \bullet \frac{\Delta P}{P}$$

Suku pertama dari ruas kanan menunjukkan perubahan kuantitas barang yang diminta dalam terma relatif (prosentase). Adapun suku kedua menunjukkan perubahan harga barang dalam terma relatif (prosentase). Persamaan di atas bisa ditulis kembali enjadi bentuk berikut ini.

$$E_P = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{Q}{P} \qquad \text{...(2.38)}$$

Ekspresi elastisitas yang direpresentasikan dalam persamaan (2.38) menunjukkan elastisitas *secant*. Hal ini disebut demikian karena dia menunjukan elastisitas yang dihitung berdasar pada suatu garis *secant* yang menghubugkan dua titik yang ada pada fungsi permintaan. Dalam Gambar 2.13 di bawah ini elastisitas yang diekspresikan dalam persamaan (2.38) menunjukkan nilai elastisitas rata-rata yang dihitung dari titik A sampai dengan titik B. Konsep ini bisa dianalogikan dengan garis *secant* yang ada pada Gambar3.6. Elastisitas ini juga biasa disebut sebagai elastisitas busur karena dia menunjukkan nilai elastisitas rata-rata pada busur tertentu dalam suatu fungsi permintaan; dalam Gambar 2.13 hal ini dicontohkan oleh busur A-B.



Gambar 2.14

Selanjutnya jika menggunakan pendekatan derivatif yang dalam hal ini mengenakan nilai limit di mana $P \rightarrow 0$, maka

$$\lim_{\Delta P \to 0} E_P = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{Q}{P}, \text{ sehingga}$$

$$\varepsilon_P = \frac{dQ}{dP} \times \frac{Q}{P} \quad \text{...(2.39)}$$

Elastisitas yang direpresentasikan dalam persamaan (2.39) di atas menunjukkan elastisitas *tangent*. Hal ini sesuai dengan konsep yang dikemukakan dalam Gambar 1.14 tentang titik singgung grafik (*tangent*). Dalam konsep titik singgung, di mana terdapat satu dan hanya satu titik singgung maka elastisitas *tangent* di atas dihitung pada titik singgung tersebut. Dalam Gambar 2.14. di atas dicontohkan bahwa elastisitas yang direprsentasikan oleh persamaan (2.39) dihitung pada titik C yang merupakan titik singgung garis yang sejajar dengan garis *secant* AB. Dengan demikian elastisitas *tangent* ini dihitung pada titik tertentu saja. Untuk titik-titik lainnya besarnya elastisitas sudah berbeda, bahkan setiap titik yang ada pada kurva di dalam Gambar 1.14. di atas mempunyai ukuran elastisitas yang berbeda sehingga bisa dikatakan bahwa elastisitas ini merupakan elastisitas sesaat.

Sekarang, lihatlah ekspresi elastisitas yang ada pada persamaan (2.39). Di sana terlihat dengan jelas bahwa suku pertama dari ruas kanan menunjukkan *slope* atau kemiringan dari kurva permintaan. Hal ini menunjukkan bahwa kemiringan (*slope*) merupakan komponen utama dari elastisitas namun dia tidak sama dengan elastisitas. Hal ini mempunyai implikasi bahwa besarnya elastisitas *secant*, katakanlah elastisitas *secant* dari titik A ke titik B pada Gambar3.14., tidak sama dengan elastisitas *tangent* pada titik C. Hal ini berbeda dengan konsep *slope* (kemiringan grafik) yang mana *slope* garis *secant* AB mempunyai ukuran yang sama dengan *slope* garis *tanget* di titik C sebagaimana didiskusikan pada seksi 4.1. dan direpresentasikan melalui Gambar 2..14 di atas.

3.2. Pangkat dan Elastisitas

Elastisitas sangat berkaitan dengan pangkat dari satu variabel yang ada pada ruas kanan dari suatu fungsi *polynom*. Perhatikanlah fugsi berikut ini,

$$Y = X^{\alpha} \qquad \text{...}(2.40)$$

Menurut aturan fungsi pangkat, maka derivatif dari fungsi di atas adalah sebagai berikut ini,

$$\frac{dY}{dX} = \alpha X^{\alpha-1}$$

$$\frac{dY}{dX} = \alpha X^{\alpha} X^{-1}$$

$$\frac{dY}{dX} = \alpha \frac{X^{\alpha}}{X}$$

Jika persamaan (2.40.) dimasukkan ke dalam ekspresi di atas, aka diperoleh:

$$\frac{dY}{dX} = \alpha \frac{Y}{X} \qquad \text{...}(2.41)$$

Seterusnya persamaan (2.41) d atas bisa ditulis kembali menjadi ekspresi berikut ini,

$$\frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} = \alpha \text{ , atau}$$

$$\alpha = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} \qquad \text{...}(2.42)$$

Perhatikan persamaan (2.42) di atas. Bandingkan ruas kanan dari persamaan (2.42) dengan ruas kanan dari persamaan (2.42), jika Y diganti dengan P dan X diganti dengan Q maka mereka tepat sama. Dengan demikian pangkat yang dipunyai oleh satu variabel pada ruas kanan dari fungsi dengan konstruksi seperti pada persamaan (2.42) tidak lain dia adalah elastisitas.

Dalam analisis ekonomi seringkali persamaan seperti yang ada pada persamaan (2.42) diekspresikan sebagai bentuk logaritma berikut ini:

$$\text{Ln}\,Y = \alpha \ln X \quad \text{...(2.43)}$$

Jika fungsi diekspresikan seperti persamaan (2.43) maka koefisien dari ruas kanan, α, merupakan elastisitas.

4. Memodelkan Grafik Biaya Rata-rata (AC) dan Biaya Marjinal (MC)

Pembahasan mengenai grafik telah dilakuan pada Bab I di depan. Namun setelah mendiskusikan topik derivatif maka sekarang terbuka kemungkinan yang lebih luas lagi dalam mengeksplorasi perilaku variabel ekonomi yang diekspresikan melalui grafik.

Dalam analisis ekonomi dan manajemen penggunaan grafik sangat membantu. Hubungan kait mengait antara satu variabel dengan variabel lainnya yang terasa sangat kompleks dalam banyak hal bisa diekspresikan melalui grafik dengan cukup sederhana sehingga bisa mudah dipahami bahkan oleh pemula sekalipun. Contoh mengenai hal ini adalah mekanisme tarik ulur yang cukup kompleks dalam pasar antara penjual (*supplier*) dan pembeli (*demander*) yang pada akhirnya menentukan harga pasar.

Derivatif, sebagaiamna dipaparkan di muka bisa juga digunakan untuk melihat bagaimana perilaku dari suatu fungsi. Dengan menggunakan dervatif bisa dikonstruksikan bentuk grafik fungsi yang menunjukkan perilaku fungsi yang bersangkutan. Berikut ini adalah salah satu contoh mengenai penggunaan derivatif untuk mengkonstruksikan sebuah grafik fungsi.

Jika diketahui definisi-definisi berikut ini:

$$\text{AC } (\textit{average cost}/\text{biaya rata-rata}) = \frac{TC}{Q}$$

$$\text{MC } (\textit{marginal cost}/\text{biaya marginal}) = \frac{d}{dQ}TC$$

$$= \frac{dTC}{dQ}$$

di mana TC adalah (*total cost*/biaya total)

Jika berdasar pada definisi di atas saja, seseorang tidak akan bisa mengetahui bagaimana perilaku dari kedua biaya di atas. Perilaku kedua biaya di atas bisa diketahui melalui bentuk grafiknya. Dengan bantuan konsep dereivatif seseorang bisa mengkonstruksikan bentuk grafik dari kedua fungsi biaya di atas. Hal ini bisa dilakukan dengan menelusuri bagaimana arah pergerakan grafiknya. Lihat kembali bahwa grafik akan turun jika nilai derivatif yang dievaluasi pada titik itu adalah negatif dan sebaliknya dia akan bergerak naik jika nilainya adalah positif. Untuk itu perlu ditemukan derivatif dari fungsi AC sebagai berikut ini:

$$\frac{d}{dQ}AC = \frac{d}{dQ}\left(\frac{TC}{Q}\right)$$

Ingat bahwa $TC = f(Q)$ sehingga :

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{TC}{Q}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dQ}TC\right)Q - \left(\frac{dQ}{dQ}\right)TC}{Q^2}$$

$$\frac{d}{dQ}AC = \frac{\left(\frac{dTC}{dQ}\right)Q - TC}{Q^2}$$

$$\frac{d}{dQ}AC = \left(\frac{dTC}{dQ}\right)\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q^2}TC$$

$$\frac{d}{dQ}AC = \frac{1}{Q}\left(\left(\frac{dTC}{dQ}\right) - \frac{TC}{Q}\right)$$

$$\frac{d}{dQ}AC = \frac{1}{Q}(MC - AC) \qquad \text{...(2.44)}$$

Seterusnya untuk mengetahui perilaku biaya rata-rata bisa menggunakan ekspresi yang ada pada persamaan (2.44). Secara spesifik hal ini dilakukan dengan mengidentifikasi segmen di mana grafik turun dan naik. Grafik AC bergerak turun jika $\frac{d}{dQ}AC < 0$. Untuk itu,

$$\frac{1}{Q}(MC - AC) < 0$$
$$(MC - AC) < 0$$
$$MC < AC$$

Dari sini bisa diketahui bahwa grafik AC akan turun ketika MC < AC. Selanjutnya grafik AC akan mengalami stasioner (mencapai titik ekstremum), jika $\frac{d}{dQ}AC = 0$, sehingga:

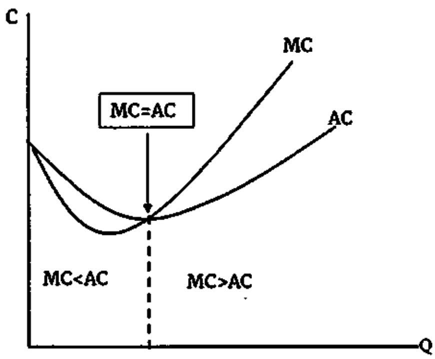
$$\frac{1}{Q}(MC - AC) < 0$$
$$(MC - AC) < 0$$
$$MC < AC$$

Dari sini bisa diketahui bahwa grafik AC akan mencapai ekstremum pada saat MC = AC.
Selanjutnya grafik AC akan bergerak naik jika $\frac{d}{dQ}AC = 0$, sehingga:

$$\frac{1}{Q}(MC - AC) = 0$$
$$(MC - AC) = 0$$
$$MC = AC$$

Dari sini bisa diketahui bahwa grafik AC akan bergerak naik pada saat MC > AC.

Dari karakteristik perilaku yang ditelusuri di atas bisa dikonstruksikan bagaimana hubungan antara grafik MC dan AC sebagaimana disajikan dalam gambar berikut ini.



Gambar 2.14.

Gambar di atas menunjukkan perilaku yang didiktekan dari hasil penemuan derivatif dari fungsi AC yang di buat di muka. Hasil temuan ini pula yang menjadi dasar dari jawaban atas pertanyaan: mengapa grafik MC selalu memotong grafik AC dari bawah dan tepat pada titik minimum AC. Tentu saja hasil temuan tersebut merupakan argumen matematik . Adapun makna intuitif dari hal ini diberikan dalam analisis ekonomi mikro yang berada di luar skope bahasan buku ini.

5. Maksimisasi Keuntungan

Dalam ekonomi mikro terutama dalam teori produksi telah diasumsikan bahwa keuntungan adalah merupakan tujuan dari setiap perusahaan. Setiap perusahaan diasumsikan selalu berusaha untuk memperoleh keuntungan yang maksimum. Pertanyaannya bagaimana rumusan yang bisa digunakan oleh setiap perusahaan dalam usahanya untuk mencapai keuntungan yang maksimum tersebut? Konsep derivatif bisa membantu menemukan rumusan yang dimaksud.

Untuk memulai hal ini pertama sekali perlu didefinisikan terlebih dahulu apa yang dimaksud dengan keuntungan. Dalam pandangan umum, keuntungan bisa dimaknai sebagai kelebihan pendapatan atas biaya. Secara teknis hal ini sama dengan selisih antara keduanya. Definisi tersebut bisa diekspresikan ke dalam bentuk matematik sebagai berikut:

$\Pi = TR - TC$ ....(2.45) di mana ∏ adalah keuntungan total, TR dan TC adalah pendapatan dan biaya total. Perlu diketahui juga bahwa besarnya TR dan TC bergantung pada Q. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa TR dan TC, dan oleh karenanya Q, merupakan fungsi dari (Q).

5.1. Kondisi Kemaksimuman Keuntungan

Selanjutnya untuk memaksimumkan fungsi keuntungan maka konsep derivatif bisa digunakan. Sebagaimana dipaparkan di muka suatu fungsi akan mencapai maksimum ketika derivatif order pertamanya sama dengan 0 (nol). Dengan demikian untuk memaksimumkan keuntungan maka perlu untuk menemukan nilai derivatifnya dan menyamakannya dengan 0 (nol). Adapun derivatif fungsi keuntungan bisa diperoleh dengan mendiferensiasikan fungsi tersebut (persamaan 5.45) sebagai berikut ini:

$$\frac{d}{dQ}\Pi = \frac{d}{dQ}TR - \frac{d}{dQ}TC \quad \text{...(2.46)}$$

Untuk mencapai maksimum maka, $\frac{d}{dQ}\Pi = 0$, sehingga:

$$\frac{d}{dQ}TR - \frac{d}{dQ}TC = 0$$

$$\frac{d}{dQ}TR = \frac{d}{dQ}TC$$

$$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dTC}{dQ}$$

Perlu diketahui bahwa ruas kiri pada ekspresi di atas adalah pendapatan marjinal (MR) dan yang ada pada ruas kanan adalah biaya marjinal (MC). Dengan demikian maka,

MR = MC ...(2.47)

Ekspresi pada persamaan (2.47) merupakan formulasi yang bisa digunakan sebagai tuntunan untuk mengidentifikasikan pada jumlah unit produksi keberapa perusahaan memperoleh keuntungan yang maksimum.

5.2. Biaya Marjinal

Biaya marginal telah menjadi subyek penting dalam usaha untuk memaksimumkan keuntungan. Untuk itu perlu disajikan suatu diskusi mengenai hal ini sebelum masuk ke dalam pembahasan maksimisasi keuntungan.

Dalam teori produksi biaya marjinal dan pendapatan marjinal merupakan komponen yang membentuk keuntungan. Biaya, termasuk biaya marginal (MC), telah dianggap sebagai sesuatu yang ditentukan oleh faktor di luar. Anggapan ini muncul disebabkan karena biaya merupakan konsekuensi langsung dari penggunaan input. Di lain pihak, penggunaan input ditentukan sepenuhnya oleh efisiensi yang bersumber pada pilihan teknologi produksi. Mesin-mesin dan peralatan adalah merupakan wahana yang membawa teknologi. Untuk itu pilihan atas mesin dan peralatan ini merupakan suatu pilihan atas teknologi apa yang akan dipakai dalam berproduksi untuk jangka waktu yang cukup lama. Walaupun proses pemilihan teknologi ini cukup kompleks bahkan melibatkan berbagai area keilmuan namun sekali dia sudah ditentukan maka seterusnya dia sudah menjadi sesuatu yang tidak bisa diubah lagi.

Oleh karenanya ilmu ekonomi mikro hanya memaparkan hal ini sebatas pada perilaku biaya yang ditujukan untuk membentuk *mindset* ekonomi dengan tujuan untuk pemilihan strategi. Dengan demikian masalah yang memperoleh perhatian besar dalam usaha pemaksimuman keuntungan adalah pendapatan dan sisi permintaan.

5.3. Fungsi Pendapatan Marjinal (MR), Pendapatan Total (TR) dan Fungsi Permintaan

Pada seksi sebelumnya telah ditemukan suatu rumusan mengenai teknik untuk mencapai keuntungan yang maksimum. MR bersama MC menjadi subyek penting dalam rumusan tersebut. Konsep yang menyangkut MC telah dipaparkan pada seksi sebelumnya. Untuk itu selanjutnya di sini perlu melakukan eksplorasi atas berbagai konsep yang menyangkut MR beserta hubungannya dengan fungsi permintaan dan TR.

Untuk memulai hal ini, perlu didefinisikan terlebih dahulu mengenai pendapatan total (TR) karena darinya bisa diturunkan fungsi pendapatan marjinal (MR). Menurut pemahaman umum TR didefinisikan sebagai:

$$TR = PQ \qquad (2.48)$$

Walaupun persamaan (2.46) menunjukkan proses mengenai usaha untuk memperoleh keuntungan yang maksimum dengan cara mendiferensiasikan secara langsung fungsi keuntungan namun untuk memperoleh derivatif dari fungsi pendapatan total di atas perlu mempertimbangkan terlebih dahulu bentuk pasar di mana perusahaan berada. Bentuk pasar ini sangat menentukan interaksi antara harga barang, P, dan jumlah barang yang diminta/kuantitas, Q. Sifat interaksi ini akan sangat menentukan proses diferensiasi dalam usaha memperoleh derivatif. Secara spesifik, hal ini didiskusikan pada bagian-bagian di bawah ini.

5.3.1. Pasar Persaingan Sempurna

Salah satu karakteristik dari pasar persaingan sempurna adalah bahwa seiap perusahaan yang ada dalam pasar tersebut tidak mampu mempengaruhi terbentuknya harga pasar. Para perusahaan bertindak secara pasif dalam menentukan harga pasar. Hal ini bermakna bahwa mereka hanya menerima berapapun harga pasar yang ada. Di lain pihak para perusahaan ini bisa menjual sejumlah berapapun yang dia inginkan pada tingkat harga yang terjadi. Dengan sifat yang demikian maka perilaku harga sepenuhnya di luar kendali mereka. Hal ini menimbulkan implikasi bahwa variabel harga adalah sudah tertentu dan tidak ada kaitannya dengan jumlah yang akan dijual. Secara matematik hal ini diekspresikan sebagai berikut.

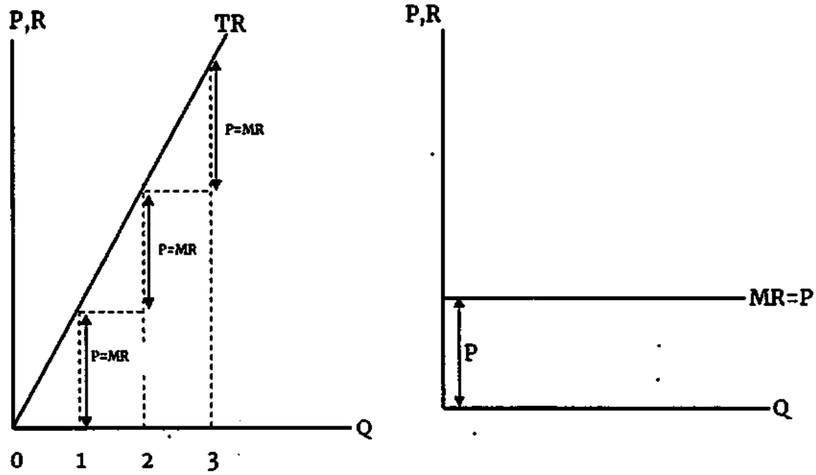
$$Q \neq f(P) \qquad (2.49)$$

Ekspresi di atas juga bisa dimaknai bahwa antara P dan Q tidak ada hubungan determinasi.

Sifat yang seperti ini jelas berpengaruh pada konstruksi fungsi MR. Untuk mendapatkan fungsi MR maka persamaan (2.48) perlu didiferensiasikan untuk memperoleh derivatif order pertama seperti berikut ini.

$$\frac{d}{dQ}TR = MR = P \quad \text{...} (2.50)$$

Terlihat pada persamaan (2.50) di atas bahwa besarnya MR adalah sama dengan harga, P. Hal ini bisa dilihat pada gambar berikut.



Gambar 2.15.

Pada gambar di atas terlihat bahwa setiap kenaikan satu unit barang yang dijual menyebabkan naiknya pendapatan total (TR) sebesar P. Dengan kata lain bisa dikatakan bahwa besarnya kemiringan garis (*slope*) dari garis pendapatan total, TR, adalah P. Padahal kemiringan garis (*slope*) tersebut merupakan derivatif dari pendapatan total, TR, yang tidak lain adalah pendapatan marjinal, MR. Selain itu bisa dillihat pula bahwa besarnya kemiringan garis (*slope*) pendapatan total, TR, adalah konstan di setiap titik yang ada pada garis pendapatan total, TR, yaitu sebesar P. Dengan demikian bisa diambil kesimpulan secara tegas bahwa besarnya pendapatan marjinal, MR, dalam konstruksi pasar persaingan sempurna adalah sebesar P (harga barang per unit produk).

5.3.2. Pasar Monopoli

Berbeda dengan yang terjadi pada pasar persaingan sempurna, dalam pasar monopoli perilaku penjual sangat dominan sehingga dia bisa sepenuhnya menentukan harga pasar. Karena itu dalam kasus ini harga yang ditentukan oleh seorang monopolis merupakan harga pasar dan oleh karenanya berpengaruh pada jumlah barang yang dijual. Dengan demikian hal ini bisa diekspresikan secara matematik sebagai hubugan berikut ini.

$$Q = f(P) \qquad (2.51)$$

Bandingkan hal ini dengan kasus yang sama yang terjadi pada pasar persaingan sempurna yang diekspresikan melalui persamaan (2.50).

Dengan konstruksi fungsi TR sebagaimana yang ada pada persamaan (2.48) maka bisa ditelusuri perilaku fungsi pendapatan marjnal, MR, melalui diferensiasi terhadap fugsi pendapatan total, TR. Karena sifatnya yang telah diketahui di muka maka prosedur diferensiasinya adalah mengikuti aturan perkalian fungsi sebagaimana ditunjukkan oleh ekspresi pada (2.31) di depan yang hasilnya adalah berikut ini:

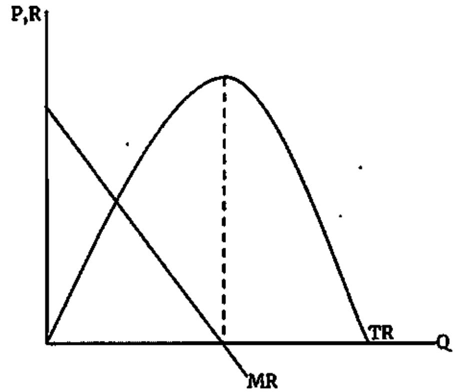
$$\frac{d}{dQ}TR = MR = \frac{dP}{dQ}Q + \frac{dQ}{dQ}P$$

$$MR = \frac{dP}{dQ}Q + P \qquad (2.52)$$

Bandingkan hal tersebut dengan yang ada pada pasar persaingan sempurna yang diekspresikan melalui persamaan (2.50). Perlu diingat kembali bahwa berdasar hukum permintaan tanda dari $\frac{dP}{dQ}$ adalah negatif, sehingga persamaan (2.52) di atas bisa ditulis kembali menjadi:

$$MR = -\left|\frac{dP}{dQ}\right|Q + P \qquad (2.53)$$

Berdasar pada temuan-temuan yang dipaparkan di atas, maka berikut ini bisa disajikan grafik MR dan hubungannya dengan TR pada pasar monopoli.



Gambar 2.16.

Pada Gambar 2..16 di atas terlihat bahwa ketika MR mencapai 0 (nol) pada saat itu kurva TR mencapai titik ekstremumnya. Selanjutnya untuk mengetahui apakah ekstremum yang dipunyai TR tersebut berupa kasus maksimum atau kasus minimum maka perlu dilihat derivatif order kedua dari TR. Mengingat bahwa MR adalah derivatif order pertama dari TR maka untuk memperoleh derivatif order kedua dari TR hal ini bisa diperoleh dengan menemukan derivatif dari MR. Hal ini bisa dilakukan dengan cara memperoleh derivatif dari persamaan (2.52) sebagai berikut ini.

$$\frac{d}{dQ}MR = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dP}{dQ}Q + P\right)$$

$$\frac{d}{dQ}MR = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dP}{dQ}Q\right) + \frac{d}{dQ}P$$

$$\frac{d}{dQ}MR = \left(\left(\frac{d}{dQ}\frac{dP}{dQ}\right)Q + \left(\frac{dQ}{dQ}\frac{dP}{dQ}\right)\right) + \frac{dP}{dQ}$$

$$\frac{d}{dQ}MR = \left(\left(\frac{d^2P}{dQ^2}\right)Q + \frac{dP}{dQ}\right) + \frac{dP}{dQ}$$

$$\frac{d}{dQ}MR = \frac{d^2P}{dQ^2}Q + 2\frac{dP}{dQ} \quad \text{.............................(2.54)}$$

Dengan melihat konstruksi grafik fungsi yang disajikan pada Gambar 2..16. maka pada pasar monopoli tersebut bentuk fungsi permintaannya adalah linier sehingga tidak ada derivatif order keduanya. Dengan kata lain derivatif order kedua dari fungsi permintaan adalah:

$$\frac{d^2Q}{dP^2} = 0$$

Untuk memberikan pemaknaan atas ekspresi di atas di sini perlu diingat bahwa dalam analisis ekonomi mikro, fungsi permintaan sering diekspresikan dalam bentuk inverse, yaitu:

$$P = f(Q) \text{ ....(2.55)}$$

Dengan ekspresi inverse ini maka bisa dikatakan bahwa,

$$\frac{d^2Q}{dP^2} = \frac{d^2P}{dQ^2} = 0$$

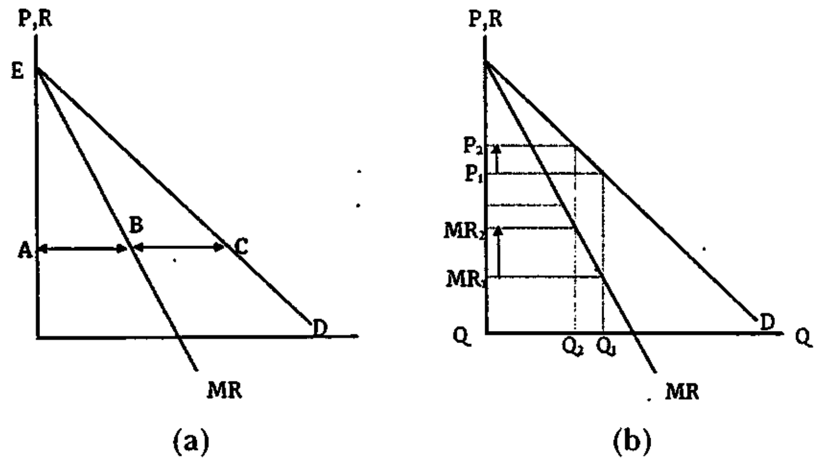
Dengan demikian maka ekspresi yang ada pada persamaan (2.54) di atas bisa dituliskan kembali menjadi:

$$\frac{d}{dQ}MR = 2\frac{dP}{dQ} \text{ ....(2.56)}$$

Perlu diketahui bahwa persamaan (2.56) merupakan bilangan negatif. Hal ini bisa diperoleh dari sifat fungsi permintaan yang berdasar pada hukum permintaan di mana $\frac{dP}{dQ}$ adalah negatif. Dengan demikian maka jenis titik ekstremum yang dipunyai oleh kurva TR adalah jenis maksimum. Hal ini sesuai dengan ekspresi grafiknya seperti disajikan dalam Gambar 2..16. di atas.

Ekspresi yang ada pada persamaan (2.56) menimbulkan implikasi adanya hubungan yang sudah tertentu dalam pasar monopoli yaitu hubungan antara permintaan dengan MR. Hubungan yang bisa dikonstruksikan di sini adalah adanya hubungan yang dijalin oleh kemiringan (*slope*) dari keduanya. Ambil kembali di sini fungsi inverse dari permintaan sebagaimana yang disajikan pada persamaan (2.55). Walaupun fungsi di atas adalah fungsi inverse dari permintaan namum untuk pertimbangan kepraktisan mulai sekarang dan seterusnya dia akan disebut sebagai fungsi permintaan saja.

Untuk menelusuri hubungan antara fungsi permintaan dan MR perlu dilakukan eksplorasi yang lebih mendalam terhadap kemiringan (*slope*) dari keduanya. Sudah diketahui dari depan bahwa kemiringan (*slope*) dari fungsi permintaan adalah $\frac{dP}{dQ}$. Selanjutnya perhatikan ekspresi yang ada pada persamaan (2.56), ekspresi tersebut tidak lain adalah kemiringan (*slope*) dari MR. Jika kemiringan (*slope*) dari MR ini dibandingkan dengan kemiringan (*slope*) dari fungsi permintaan maka bisa dilihat bahwa kemiringan (*slope*) dari MR besarnya adalah dua kali kemiringan (*slope*) dari fungi permintaan. Secara geometrik hal ini bisa dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 2.17.

Pada panel (a) gambar di atas terlihat bahwa panjang AB dan BC adalah sama. Hal ini menunjukkan bahwa jika seseorang menarik garis sejajar dengan sumbu horisontal di manapun pada domain grafik tersebut maka akan didapati tiga titik, yang pertama adalah titik potong garis tersebut dengan sumbu tegak, kedua adalah titik potong dengan grafik MR dan ketiga adalah titik potong dengan grafik fungsi permintaan. Jarak yang dibentuk antara titik potong dengan sumbu tegak dan titik yang memotong grafik MR selalu sama dengan jarak yang dibentuk oleh titik potong pada grafik MR dan titik potong dengan grafik fungsi permintaan. Pada grafik di atas besarnya AB = BC. Dengan kata lain garis MR merupakan tempat kedudukan bagi titik-titik kesimetrian yang membelah jarak antara sumbu tegak dengan kurva permintaan menjadi sama panjang.

Sebaliknya panel (b) menunjukkan hal yang sama tetapi dengan cara yang berbeda. Pada jumlah barang yang diminta sebesar Q_1, tingkat harga yang terjadi adalah P_1 dan MR berada pada MR_1. Pada barang yang diminta sebesar Q_2, tingkat harga yang terjadi adalah P_2 dan MR berada pada MR_2. Dari sini bisa dilihat perbedaan yang terjadi pada MR (MR_2-MR_1) adalah 2 (dua) kali lebih besar dibanding dengan perbedaan yang terjadi pada P (P_2- P_1). Padahal sumber perbedaan tersebut adalah sama yaitu perubahan Q dari Q_1 ke Q_2. Hal ini terjadi disebabkan karena kemiringan (*slope*) dari garis MR adalah 2 (dua) kali kemiringan (*slope*) dari garis kurva permintaan.

Pendekatan melalui cara lain bisa ditempuh dalam melihat hal ini. Pandang kembali panel (a) pada Gambar 2..17. Secara lebih khusus bandingkan segitiga EAB dan segitiga EAC. Kedua segitiga tersebut mempunyai ketinggian yang sama yaitu AE, sementara alas dari segitiga EAC adalah dua kali lebih panjang dari alas segitiga EAB. Hal ini menunjukkan bahwa segitiga EAB yang merupakan representasi reaksi dari kurva MR terhadap perubahan harga mempunyai ukuran reaksi yang dua kali lebih besar daripada yang terjadi pada segitiga EAC (yang merupakan representasi dari reaksi fungsi permintaan).

5.3.3. Kasus Lain Pasar Monopoli

Pada pembahasan di depan disebutkan bahwa dalam pasar monopoli, monopolis memegang kontrol sepenuhnya atas pasokan ke pasar. Dengan begitu maka jumlah barang yang di pasok ke pasar akan mempengaruhi harga pasar. Kondisi seperti ini digambarkan secara matematis sebagai adanya hubungan fungsional antara harga barang dan jumlah barang yang dipasok ke pasar.

Pada pemaparan di depan hubungan yang seperti ini direpresentasikan sebagai fungsi permintaan. Secara lebih khusus bentuk fungsi permintaan direpresentasikan sebagai fungsi linier sehingga bentuk kurva pendapatan total (TR) dan pendapatn marjinal (MR) beserta hubungan di antara mereka terlihat sebagaimana disajikan pada Gambar 2..16 dan Gambar 2..17. Namun demikian representasi fungsi permintaan sebagai fungsi linier tidaklah mutlak. Perilaku permintaan bisa direpresentasikan melalui berbagai fungsi. Untuk melihat hal tersebut berikut ini akan diberi sebuah ilustrasi.

Anggaplah di sini bahwa fungsi permintaan direpresentasikan berupa fungsi berikut ini:

$$P = \frac{0,75}{Q} + 0,5 \quad \text{...(2.58)}$$

Berdasar pada fungsi permintaan di atas maka bisa diperoleh fungsi pendapatan total, TR, berikut ini:

$$TR = PQ$$

Dengan memasukkan P sebagaimana yang terdapat pada persamaan (2.48) maka diperoleh:

$$TR = PQ = \left(\frac{0,75}{Q} + 0,5\right)Q$$

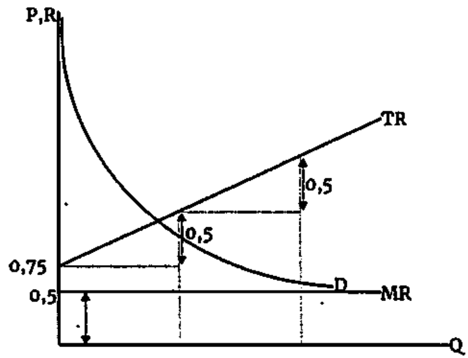
$$TR = 0,75 + 0,5Q$$

Dari persamaan TR di atas bisa diperoleh persamaan MR berikut ini

$$MR = \frac{d}{dQ}TR = 0,5$$

Hasil-hasil yang diperoleh di atas bisa diekspresikan dalam grafik fungsi sebagaimana dalam gambar berikut ini.

Dalam Gambar 2..18 di bawah ini terlihat dengan jelas bahwa perilaku pendapatan total, TR, adalah linier naik. Ini sangat mirip dengan hal yang sama yang ada pada pasar persaingan sempurna. Bahkan, jika dilihat kenaikan pendapatan total, TR, adalah proporsional yakni setiap kenaikan 1 (satu) unit barang yang dijual maka TR akan naik sebesar MR hal mana tepat sama dengan yang ada pada pasar persaingan sempurna. Begitu juga ketika dilihat perilaku pendapatan marjinal, MR, pada Gambar 2..18 di atas didapati bahwa hal ini tepat sama dengan perilaku MR yang ada pada pasar persaingan sempurna. Untuk itu diperlukan kecermatan dan kehati-hatian menghadapi kasus seperti ini. Garis pendapatan total, TR, yang bergerak linier ke atas dan juga pendapatan marjinal, MR, yang bergerak konstan tidak bisa digunakan sebagai tengara bahwa hal itu berasal dari pasar persaingan sempurna. Namun demikian, ada dua hal yang bisa digunakan sebagai tengara untuk membedakan bahwa hal itu berasal dari pasar persaingan sempurna atau pasar monopoli. Pertama, garis MR pada pasar persaingan sempurna sekaligus merupakan harga (P), namun dalam pasar monopoli tidak demikian. Kedua, garis TR, pada pasar persaingan sempurna selalu berawal dari titik asal (0,0) yang berarti bahwa persamaan garisnya tidak mempunyai konstanta (*intercept*), sementara pada pasar monopoli hal ini mempunyai konstanta yang berarti dia mempunyai *intercept*. Mengenai hal ini bisa dilihat pada persamaan TR pada ekspresi di atas sebelumnya dan juga pada Gambar 2..18 di bawah ini yang menunjukkan bahwa konstanta atau penggal garis atau *intercept* dari garis TR adalah sebesar 0,75.



Gambar 2.18.

Dari fungsi beserta grafik yang disajikan di atas terlihat bahwa konstanta dari fungsi permintaan berperan sebagai slope dari fungsi TR yang berarti dia merupakan MR. Untuk itu semakin besar konstanta dari fungsi permintaan maka semakin besar slope dari fungsi TR. Jika konstanta dari fungsi permintaan adalah 0 (nol) maka bentuk garis TR adalah horisontal dan MR sama dengan 0 (nol).

Sekarang dengan alasan *excercise*, di sini akan dicari besarnya *slope* dari MR. Hal ini bisa diperoleh melalui diferensiasi secara langsung atas fungsi MR sebagai berikut ini.

$$MR = 0,5$$

$$\frac{d}{dQ} MR = 0$$

Selanjutnya, walaupun dengan pendekatan di atas bisa ditemukan dengan mudah besarnya $\frac{d}{dQ}MR$ namun demi kepentingan *excercise*, berikut ini akan dilakukan pendekatan lain untuk memperoleh besarnya $\frac{d}{dQ}MR$. Pendekatan yang akan dilakukan ini nanti adalah dengan menggunakan ekspresi yang ada pada persamaan (2.45). Untuk itu diperlukan beberapa langkah berikut ini.

- Memperoleh $\frac{dP}{dQ}$

  $\frac{dP}{dQ}$ ini bisa diperoleh dengan menurunkan (diferensiasi) fungsi permintaan sebagai berikut ini

  $$\frac{dP}{dQ} = -\frac{0,75}{Q^2}$$

- Memperoleh $\frac{d^2P}{dQ^2}$

  Ini merupakan derivatif order kedua dari fungsi permintaan. Hal ini bisa diperoleh dengan melakukan diferensiasi dua kali atas fungsi permintaan. Mengingat bahwa diferensiasi untuk order pertama telah diperoleh, maka untuk memperoleh derivatif order kedua ini cukup melakukan diferensiasi satu kali lagi terhadap derivatif order pertama yang telah diperoleh sebelumnya, yaitu:

  $$\frac{d^2P}{dQ^2} = 2\frac{0,75}{Q^3}$$
  $$= \frac{1,5}{Q^3}$$

- Memasukkan terma-terma yang telah ditemukan ke dalam formula (2.45) sehingga diperoleh:

  $$\frac{d}{dQ}MR = \frac{1,5}{Q^3}Q + 2\left(-\frac{0,75}{Q^2}\right)$$
  $$\frac{d}{dQ}MR = \frac{1,5}{Q^2} - \frac{1,5}{Q^2}$$
  $$= 0$$

Ternyata dengan pendekatan ini diperoleh hasil yang sama dengan yang diperoleh sebelumnya. Dengan ditemukannya hasil ini diharapkan pembaca tidak dibuat bingung dengan ekspresi yang nampak cukup kompleks pada persamaan (2.54) di atas.

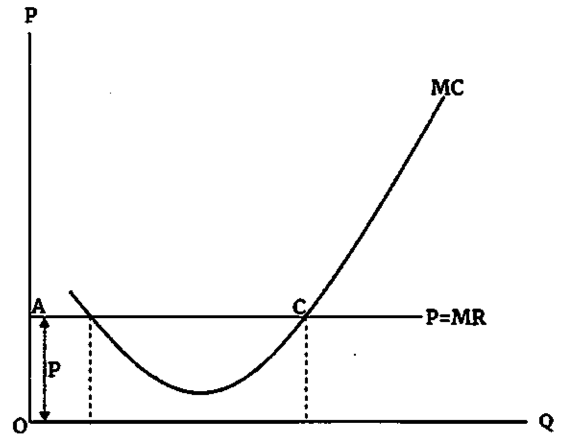
5.4. Proses Maksimisasi Keuntungan

Berbagai konsep mengenai maksimisai keuntungan telah didiskusikan secara mendalam pada seksi-seksi di atas. Namun demikian masih dirasa perlu untuk mengetahui konteks secara keseluruhan dari proses ini. Hal ini ditujukan agar pembaca bisa mengetahui gambaran secara keseluruhan mengenai proses tersebut. Hal ini bisa dilakukan dengan pendekatan analisis grafikal. Untuk melakukan hal ini maka perlu dilihat kembali tuntunan yang ada pada persamaan (2.47) yang mengatakan bahwa perusahaan akan mencapai keuntungan maksimum jika MR = MC. Secara grafikal, hal ini ditunjukkan oleh titik potong antara MR dan MC karena titik potong antara kurva MC dan MR merupakan titik persekutuan antara keduanya yang berarti bahwa titik tersebut dimiliki oleh keduanya.

Sekali lagi karena sifat pasar yang berbeda, maka model maksimisasi keuntungan juga berbeda antara yang terjadi pada pasar persaingan sempurna dan yang terjadi pada pasar monopoli. Berikut ini disajikan proses dari keduanya.

5.4.1. Maksimisasi Keuntungan di Pasar Persaingan Sempurna

Pada pasar persaingan sempurna, bentuk kurva MR adalah datar sejajar dengan sumbu horisontal. Pada Gambar 2..19 di bawah ini, kurva MC memotong kurva MR pada dua tempat. Sesuai dengan prinsip kalkulus, maka keduanya merupakan titik ekstremum. Namun, pada posisi ini belum bisa ditentukan titik mana yang merupakan maksimum dan titik mana yang merupakan minimum. Untuk mengetahui hal ini maka perlu dilakukan pemeriksaan dengan melihat kondisi order kedua yang ada pada derivatif kedua dari fungsi keuntungan.



(a)

Gambar 2.19.

Prosedur eksaminasi (pemeriksaan) kondisi order kedua dengan menggunakan bantuan derivatif merupakan hal yang standar. Namun dalam kasus yang dihadapi saat ini hal tersebut tidak bisa dilakukan disebabkan karena tidak tersedianya fungsi keuntungan. Untuk itu di sini akan ditempuh cara yaitu dengan memeriksa titik-titik tetangga tedekat dari titik ekstremum sebagaimana telah didiskusikan di depan. Namun untuk menangkap muatan intuisi prosedur eksaminasi ini akan dikembangkan lebih jauh.

Untuk mengeksplorasi hal ini, tengoklah kembali persamaan 5.26. Ekspresi ini menunjukkan tambahan keuntungan dari adanya tambahan satu lagi unit produk yang terjual, $\frac{d}{dQ}\Pi$, yang besarnya merupakan selisih dari $\frac{d}{dQ}TR$ dan $\frac{d}{dQ}$ TC. Terma $\frac{d}{dQ}\Pi$ ini juga sekaligus menunjukkan angka arah (*slope*) dari fungsi keuntungan. Dengan mengikuti patokan yang dikembangkan pada persamaan (2.33), (2.34) dan (2.35) di depan maka disampaikan hal-hal berikut ini:

Arah grafik fungsi keuntungan turun jika:

$$\frac{d}{dQ}TR - \frac{d}{dQ}TC < 0 \rightarrow \frac{d}{dQ}TR < \frac{d}{dQ}TC, \text{ (MR < MC)}.$$

Grafik fungsi keuntungan stasioner jika:

$$\frac{d}{dQ}TR - \frac{d}{dQ}TC = 0 \rightarrow \frac{d}{dQ}TR = \frac{d}{dQ}TC, \text{ (MR = MC)}.$$

Arah grafik fungsi keuntungan naik jika:

$$\frac{d}{dQ}TR - \frac{d}{dQ}TC > 0 \rightarrow \frac{d}{dQ}TR > \frac{d}{dQ}TC, \ (\text{MR} > \text{MC}).$$

Berdasar pada ketiga hal di atas, di sini bisa dikonstruksikan bentuk dari fungsi keuntungan. Jika fungsi keuntungan bergerak turun (MR < MC) kemudian mencapai kondisi stasioner (MR = MC) dan kemudian berubah naik (MR > MC) maka bisa dikatakan bahwa pada sekitar titik ekstremum bentuk fungsi keuntungan adalah membuka ke atas seperti sebuah mangkuk sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 2..13. panel (b). Dari bentuk yang seperti ini maka bisa dipastikan bahwa jenis ekstremumnya adalah minimum. Hal seperti ini bisa terjadi hanya jika saat memotong grafik MR arah grafik MC menurun.

Untuk jenis ekstremum yang maksimum, hal ini bisa diobservasi dari kondisi yang sebaliknya. Untuk itu kondisi kemaksimuman keuntungan atau kondisi order kedua bisa dilihat dari arah grafik MC ketika memotong garis MR. Untuk keuntungan yang maksimum kurva MC harus dalam keadaan naik ketika memotong garis MR dan sebaliknya untuk keuntungan yang minimum dia harus dalam keadaan menurun ketika memotong garis MR. Inilah tengara yang sangat mudah untuk diobservasi ketika fungsi keuntungan tidak bisa diketahui.

Untuk mendukung hal tersebut, di sini akan disajikan diskusi secara intuitif yaitu ketika kurva MC bergerak turun maka pada saat itu terdapat kemanfaatan (*advantage*), berupa turunnya biaya produksi, yang bisa diperoleh oleh perusahaan jika dia menambah jumlah produksi sebesar satu unit lagi. Karena dalam kasus ini harga pasar adalah konstan maka kemanfaatan yang berupa penurunan biaya produksi tersebut tidak lain adalah kenaikan keuntungan. Dengan keuntungan yang lebih besar maka perusahaan direkomendasikan untuk terus berproduksi agar bisa terus memperoleh keuntungan yang lebih besar. Dengan kata lain pada titik ekstremum yang diperiksa ini keuntungan belum mencapai maksimum sehingga perusahaan perlu terus menambah jumlah produksi.

Sebaliknya jika situasi yang terjadi adalah sebaliknya yakni ketika memotong garis MR, kurva MC bergerak naik ke atas maka pada saat itu telah terjadi kemadharatan (*disadvantage*) yang berupa naiknya biaya produksi jika perusahaan memproduksi satu unit barang lagi. Pada posisi ini bisa dipastikan bahwa jika perusahaan menambah produksi satu unit lagi maka besarnya MC sudah akan melebihi MR. Dengan demikian biaya untuk memproduksi lagi sebesar satu unit sudah melebihi pendapatan yang diterima (MR). Dengan kata lain pendapatan yang diperoleh sebagai akibat dari penjualan barang tersebut sudah tidak mampu untuk menutup biaya produksi. Dalam posisi demikian maka perusahaan tidak lagi direkomendasikan untuk menambah jumlah produksinya. Dengan kata lain pada titik ekstremum tersebut perusahaan telah mencapai keuntungan yang maksimum.

Contoh 2.26.

Pandanglah fungsi-fungsi permintaan dan biaya total berikut ini

Fungsi permintaan:

$P = 17{,}5$

Fungsi biaya marginal :

$$MC = \frac{1}{2}Q^2 - 3Q + 20$$

a. Tentukan pada jumlah Q berapa yang bisa menghasilkan keuntungan yang minimum dan maksimum
b. Gambar grafiknya

Penyelesaian:

a. Untuk memperoleh ekstremum dari fungsi keuntungan diperlukan fungsi MR

   Padahal MR adalah merupakan derivatif pertama dari biaya total (TR). Sementara berdasar definisi TR adalah:

   $TR = PQ$

   $TR = 17{,}5Q$

   Dengan demikian MR adalah:

$$MR = \frac{d}{dQ}TR = 17{,}5$$

Untuk memperoleh ekstremum dari fungsi keuntungan maka:
MC = MR

$$\frac{1}{2}Q^2 - 3Q + 20 = 17{,}5$$

$$\frac{1}{2}Q^2 - 3Q + 2{,}5 = 0$$

Selanjutnya untuk memperoleh ekstremum keuntungan maka persamaan di atas perlu diselesaikan untuk Q dengan cara menemukan akar-akar dari persamaan di atas. Untuk itu persamaan di atas bias ditulis terlebih dahulu menjadi:

$$\frac{1}{2}\left(Q^2 - 6Q + 5\right) = 0$$

Mengalikan kedua ruas dengan dua maka diperoleh ekspresi baru sebagai berikut ini:

$$Q^2 - 6Q + 5 = 0$$

Selanjutnya untuk memperoleh akar-akar persamaan di atas bisa ditempuh dengan melakukan faktorisasi persamaan di atas menjadi berikut ini:

$$(Q - 1)(Q - 5) = 0$$

Terdapat dua cara bagi ekspresi di atas agar bisa terpenuhi. Pertama jika terma pertama pada ruas kiri,

$(Q-1) = 0$, atau

Jika terma kedua pada ruas kiri

$$(Q - 5) = 0$$

Jika $(Q - 1) = 0$, maka berarti $Q = 1$
Jika $(Q - 5) = 0$, maka berarti $Q = 5$.
Dengan demikian maka nilai ekstremum untuk fungsi keuntungan ini adalah:
$Q_1 = 1$
$Q_2 = 5$

Untuk mengetahui dua nilai Q di atas mana nilai yang menghasilkan keuntungan maksimum dan mana yang menghasilkan keuntungan minimum maka bisa ditempuh dengan menggunakan teknik yang telah dipaparkan di bagian sebelum ini.

Teknik tersebut adalah dengan memeriksa arah grafik MC ketika dia memotong MR.

Adapun untuk mengetahui arah dari grafik MC tersebut perlu diketahui angka arah (*slope*) dari fungsi MC, yaitu:

$$\frac{d}{dQ}MC = Q - 3$$

Pada Q = 1, maka besarnya angka arah (*slope*) adalah:

$$\frac{d}{dQ}MC = 1 - 3$$
$$= -2\ (< 0)$$

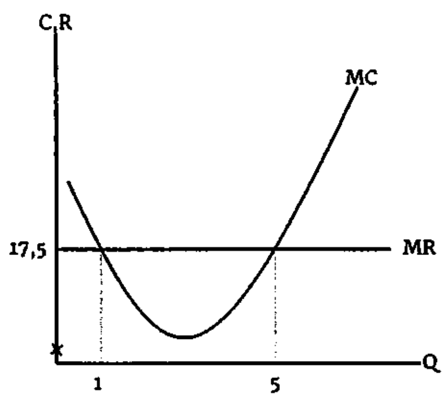
Dengan demikian sesuai dengan kriteria yang dikembangkan di depan maka bisa dipastikan bahwa pada nilai Q = 1 keuntungan yang terjadi adalah keuntungan minimum.

Pada Q = 5, maka besarnya angka arah (*slope*) adalah:

$$\frac{d}{dQ}MC = 5 - 3$$
$$= 2\ (> 0)$$

Dengan demikian sesuai dengan kriteria yang dikembangkan di depan maka bisa dipastikan bahwa pada nilai Q = 5 keuntungan yang terjadi adalah keuntungan maksimum.

b. Gambar dari hasil yang ditemukan di atas bisa dilihat pada grafik berikut ini.

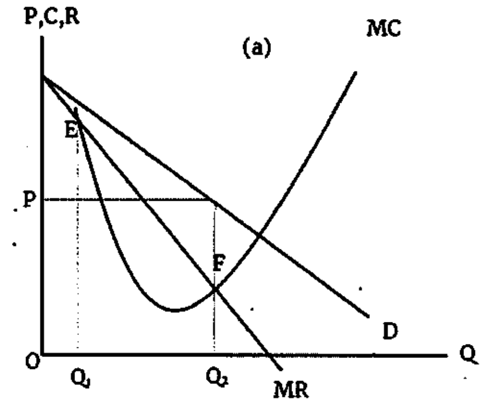


Gambar 2.20.

5.4.2. Maksimisasi Keuntungan di Pasar Monopoli

Pasar monopoli mempunyai karakteristik yang sangat berbeda dengan pasar persaingan sempurna. Berikut ini akan disajikan eksplorasi mengenai maksimisasi keuntungan di pasar monopoli.

Sebagaimana diketahui sebelumnya bahwa syarat (orde pertama) bagi keuntungan yang maksimum adalah bahwa perusahaan harus berproduksi pada jumlah di mana MC = MR.



Gambar 2.21.

Pada gambar di atas terlihat bahwa kurva MC memotong garis MR pada dua titik yaitu titik E dan titik F. Permasalahan yang muncul kemudian adalah menentukan mana dari kedua titik tersebut yang merupakan keuntungan maksimum dan mana yang merupakan keuntungan minimum. Hal ini bisa dideteksi melalui syarat atau kondisi orde kedua. Kondisi orde kedua ini mengatakan bahwa ketika memotong garis MR, kurva MC harus sedang dalam keadaan bergerak naik. Dari sini bisa dilihat pada Gambar 2..20 di atas bahwasanya titik yang memenuhi kondisi orde kedua ini hanyalah titik F. Pada sisi lain bisa dilihat bahwa titik F merupakan titik yang bersesuaian dengan keuntungan yang maksimum.

<u>Contoh 2.27.</u>

Pandanglah fungsi-fungsi permintaan dan biaya total berikut ini

Fungsi permintaan:

$$P = -Q + 22$$

Fungsi biaya total :

$$MC = 3Q^2 - 20Q + 34$$

Tentukan pada jumlah Q berapa yang bisa menghasilkan keuntungan yang minimum dan maksimum

Penyelesaian:

Untuk memperoleh ekstremum dari fungsi keuntungan diperlukan fungsi MR
Padahal MR adalah merupakan derivatif pertama dari biaya total (TR). Sementara berdasar definisi TR adalah:

$$TR = PQ$$
$$TR = (-Q + 22)Q$$
$$TR = -Q^2 + 22Q$$

Dengan demikian MR adalah:

$$MR = \frac{d}{dQ}TR = -2Q + 22$$

Untuk memperoleh ekstremum dari fungsi keuntungan maka syarat yang harus dipenuhi adalah:

$$MC = MR$$
$$3Q^2 - 20Q + 34 = -2Q + 22$$
$$3Q^2 - 18Q + 12 = 0$$
$$3\left(Q^2 - 6Q + 4\right) = 0$$
$$\left(Q^2 - 6Q + 4\right) = 0$$

Untuk memperoleh ekstremum yang dimaksud, maka perlu ditemukan akar dari persamaan di atas dengan menggunakan rumus a.b.c, sehingga diperoleh:

$$Q_1 = 3 - 2{,}2361;\ Q_2 = 3 + 2{,}2361$$
$$Q_1 = 3 - 2{,}2361;\ Q_2 = 3 + 2{,}2361$$
$$Q_1 = 0{,}7639;\ Q_2 = 5{,}2361$$

Hasil di atas menunjukkan jumlah penjualan/produksi yang bisa menghasilkan keuntungan yang berada pada ekstremum. Namun demikian belum bisa diketahui mana dari kedua kuantitas (Q) tersebut yang menghasilkan keuntungan yang maksimum karena salah satu di antara titik ekstremum di atas merupakan keuntungan yang minimum dan yang lainnya adalah keuntungan yang maksimum. Guna mengetahui hal tersebut perlu diselidiki melalui persyaratan orde kedua. Sebagaimana disebutkan di depan, bahwasanya kondisi orde kedua yang harus dipenuhi bagi keuntungan yang maksimum adalah pada saat kurva MC memotong kurva MR, kurva MC harus dalam keadaan bergerak naik. Untuk itu perlu mengetahui bagaimana kondisi kurva MC pada kedua nilai kuantitas (Q) di depan. Hal ini bisa dilakukan dengan menguji slope dari kurva MC pada masing-masing nilai Q di atas.

$$\text{Slope MC} = \frac{dMC}{dQ} = 6Q - 20$$

Untuk memperoleh nilai slope, maka masing-masing nilai Q perlu dimasukkan ke dalam persamaan slope MC di atas.

$$\text{Untuk } Q = 0{,}7639$$

$$\text{Slope MC} = 6(0{,}7639) - 20$$

$$= -15{,}4166 < 0$$

Dengan demikian pada nilai Q = 0,7639, maka slope MC menurun yang berarti bahwa grafik MC bergerak turun. Lebih jauh hal ini mengimplikasikan bahwa keuntungan yang terjadi pada Q = 0,7639 adalah minimum.

$$\text{Untuk } Q = 5{,}2361$$

$$\text{Slope MC} = 6(5{,}2361) - 20$$

$$\text{MC} = 11{,}4166 > 0$$

Dengan demikian pada nilai Q = 5,2361, maka slope MC adalah positif yang berarti bahwa grafik MC bergerak naik. Lebih jauh hal ini mengimplikasikan bahwa keuntungan yang terjadi pada Q = 5,2361 adalah maksimum.

5.5. Fungsi dengan Lebih dari Dua Variable

Sebagian besar dari pembahasan selama ini hanya melibatkan satu fungsi yang bergantung pada satu variabel lainnya. Dalam pemodelan akan banyak ditemukan adanya fungsi dengan dua atau lebih variabel lainnya. Secara umum fungsi tersebut diekspresikan sebagai:

$$Z = f(X, Y)$$

Sebagai akibatnya dibutuhkan suatu pemahaman mengenai konsep derivatif parsial dan derivatif total.

a. **Derivatif Parsial**

Sebelum kita sampai pada pembahasan inti perlulah kiranya di sini disampaikan hal-hal yang derivative parsial. Hal yang penting dilihat di sini adalah mengenai masalah tanda atau simbol. Derivative parsial biasanya diberikan tanda yang berbeda dengan derivative yang selama ini sudah kita kenal. Tanda ð menunjukkan derivative parsial dan biasa diucapkan sebagai "parsial".

Z_X dimaknai sebagai derivatif parsial dari Z terhadap X. Cara lain menuliskan Z_X ini adalah dengan f_X atau f'_X atau ðZ/ðX.

Derivative parsial di sini dimaknai sebagai perubahan (dengan jumlah yang sangat kecil, mendekati nol) dari dependen variabel (variabel di ruas kiri) sebagai akibat dari adanya perubahan (dengan jumlah yang sangat kecil, mendekati nol) dari salah satu independen variabel (variabel di ruas kanan), dengan tetap menahan variabel-variabel di ruas kanan lainnya sebagai tetap (tak berubah). Sebagai ilustrasi adalah ðZ/ðX yang bisa dimaknai sebagai derivatif dari Z terhadap X di mana besarnya Y adalah tetap.

b. **Derivatif Total**

Berbeda dengan derivatif parsial, derivatif total ini dimaknai sebagai derivatif dari dependen variabel (ruas kiri) terhadap semua (total) variabel ruas kanan yang ada. Derivitif total bisa diperoleh atau didefinisikan sebagai berikut:
dZ = ðZ/ðX dX + ðZ/ðY dY.
Sebagai ilustrasi, di sini diberikan suatu fungsi:

$$Z = X^2 - Y^2$$

Di sini diminta untuk menemukan nilai dari derivatif total.
Penyelesaian dari hal ini adalah
ðZ/ðX = 2XdX; ðZ/ðY= −2YdY

6. Maksimisasi Terkendala (*Constrained Maximization*)

Maksimisasi terkendala meruakan topik sangat penting dalam ilmu ekonomi Hal ini dikarenakan sifat dari ekonomi itu sendiri pada dasarnya adalah memilih dari berbagai alternatif yang ada dengan mengupayakan pengorbanan yang sekecil mungkin. Sifat ini bisa dipandang sebagai menggunakan bekal (*endowment*) yang tertenu jumlahnya untuk digunakan memperoleh hasil yang maksimum. Karakter yang seperti ini jelas tepat direpresentasikan sebagai optimisasi terkendala (*constraint optimization*). Berikut ini disajikan bagaimana kasus dari optimisasi terkendala yang dimaksudkan di sini.

Disediakan suatu fungsi yang akan dioptimumkan $Z = X^2 + Y^2 - 4XY$ dengan fungsi batasan adalah: $X + Y = 80$. Berapakah nilai X dan Y yang bisa memaksimumkan nilai tujuan?

Penyelesaian:

a. Menyusun fungsi batasan menjadi fungsi implisit

   $80 = X + Y \rightarrow 80 - X - Y = 0$

b. Menyusun fungsi Lagrangian

   $£ = X^2 + Y^2 - 4XY + \lambda\,(80 - X - Y)$

   Cermati dengan seksama bahwa fungsi batasan implisit besarnya adalah sama dengan 0 (nol). Ketika fungsi batasan implisit ini dikalikan dengan bilangan λ maka hasil kalinyapun sebesar nol. Dengan demikian fungsi Lagrangian, £, besarnya adalah sama dengan fungsi tujuan. Sehingga memaksimumkan fungsi Lagrangian, £, tidak lain adalah memaksimumkan fungsi tujuan itu sendiri

c. Mencari derivatif-derivatif yang terkait:

   $\partial £ / \partial X = 2X - 4Y - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2X - 4Y$ (1)

   $\partial £ / \partial Y = 2Y - 4X - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -4X + 2Y$ (2)

   $\partial £ / \partial \lambda = 80 - X + Y$ (3)

   Sehingga $2X - 4Y = -4X + 2Y \rightarrow 6X = 6Y \rightarrow X = Y$

   Substitusikan hasil terakhir di atas dan memperoleh:

   $X = Y = 40$

   Dengan demikian besarnya nilai X dan Y yang bisa meghasilkan nilai maksimum pada fungsi tujuan adalah masing-masing X dan Y sebesar 40.

III

PERRSIAPAN PEMODELAN

Pada bab-bab sebelumnya telah panjang lebar didiskusikan berbagai bentuk model yang bisa dipilih dari ranah matematika. Seseorang tinggal memilih model mana yang dianggap paling cocok dengan perilaku yang ingin di representasikan. Mengenai hal ini sesuatu yang ingin dimodelkan bisa saja didekati dengan berbagai cara. Namun masing-masing pendekatan tentu saja mempunyai asumsi dasar tertentu yang berbeda misalnya karakteristik teknologi berproduksi, sifat dari input yang ada dalam kaitannya dengan input yang lain apakah mereka bisa dengan mudah bersubstitusi apa tidak. Hal-hal yang detil seperti ini tentu saja akan menanmbah tingkat kerumitan atau kompleksitas dari model yang dibangun. Di lain pihak, terdapat adanya tuntutan pardimony (kesederhanaan) sehingga model tersebut bisa dipahami denga mudah. Untuk itu pembangun model perlu menentukan sejauh mana tingkat kerumitan yang bisa diterima.

PROSES PEMODELAN

Dalam pemodelan terdapat proses yang secara umum biasa dilalui. Namun begitu urut-urutan dari pemodelan tersebut belum tentu sama antara pembangunan model yang satu dengan pembangunan model yang lain. Apalagi jika dilihat jenis-jenis model yang ada sangat bervariasi misalnya model teoretik dan model empirik. Kedua jenis model yang disebut ini tentulah mempunyai pendekatan dan proses pembangunannya yang sangat berbeda. Berikut ini akan dipaparkan proses pembangunan dari model teoretik-matematik/geometik.

1. PENENTUAN TUJUAN PEMODELAN

Tahap awal dari pemodelan adalah menentukan tujuan apa yang ingin dicapai dari model yang akan dibangun tersebut. Penentuan tujuan tersebut merupakan tahap awal yang kritis karena ketika terjadi kekeliruan dalam penentuan tujuan ini maka akan berakibat dari lancungnya model yang dibangun. Sebagai gambaran adalah apakah ingin menjelaskan proses bagaimana terbentuknya biaya produksi atau pemakaian input produksi. Dua hal ini berbeda satu sama lain namun keduanya juga merupakan suatu proses sebab akibat secara langsung. Suatu proses produksi tentu saja akan menggunakan berbagai input, sementara pemakaian sejumlah input dalam takaran tertentu dalam kegiatan produksi akan berakibat langsung pada munculnya sejumlah biaya tertentu yang kesemuanya jika ditotalkan akan membentuk biaya produksi total (*total cost*). Dengan demikian kedua hal ini sangatlah erat berkaitan satu sama lain namun keduanya tidak bisa diekspresikan dalam satu cara representasi yang sama dan salah satunya tidak bisa mewakili yang lain dan oleh karenanya mereka bukan alat representasi pengganti terhadap yang lainnya.

Perbedaan di antara keduanya namun perilaku keduanya sangatlah terkoordinasi dalam gerak yang seksama. Dengan kenyataan yang seperti ini maka masing-masing dari keduanya bisa berperan sebagai validator bagi lainnya. Artinya, pemodel bisa melakuan pengecekan atas model tentang perilaku biaya yang dibangunnya dengan menggunakan perilaku input produksi.

Di sini terlihat jelas bahwa penentuan tujuan sangatlah penting agar jangan sampai terjadi tumpang tindih dalam merepresentasikan sesuatu ke dalam satu model.

2. MEMILIH PENDEKATAN YANG PALING COCOK

Dalam pemodelan terdapat adanya satu prinsip penting yaitu parsimoni (kehematan). Perlu diketahui di sini bahwasanya terdapat hubungan yang terbalik (*trade-off*) antara tingkat kerumitan dengan kemampuan menjelaskan dari suatu model. Model yang sederhana akan mudah dipahami oleh para pembacanya, namun dia mempunyai berbagai kendala dan keterbatasan dalam menjelaskan secara rinci dari sesuatu yang dimodelkan. Sebaliknya model yang lebih rumit akan memberikan lebih banyak informasi secara rinci namun di lain pihak dia kehilangan sebagian kemampuannya dalam menjelaskan fenomena yang ingin direpresentasikan.

Dalam hal ini kesederhanaan ataupun kehematan dalam pemakaian model sangatlah menjadi pertimbangan. Hal ini tidak bisa diartikan bahwa dalam pemodelan haruslah menggunakan model yang paling sederhana. Namun hal ini perlu dimaknai bahwasanya jika sesuatu bisa dan sudah memadai untuk direpresentasikan dengan model yang paling sederhana, misalnya hanya dengan diagram, maka tidak ada kepentingan untuk menggunakan model yang lebih rumit.

Seringkali pemodel dihadapkan pada pilihan pendekatan yang tidak terlalu mudah. Paling tidak terdapat dua hal yang menyebabkan pemodel direpotkan dalam urusan pemilihan pendekatan yang paling cocok. Pertama adalah menyangkut usaha untuk mengetahui siapakah yang akan menjadi konsumen dari model yang akan dibangun ini nantinya. Jika model yang akan dibangun menuntut adanya detil yang jauh sementara model tersebut akan diperuntukkan kepada sekelompok pembaca dengan latar belakang training yang tidak begitu tinggi pada area yang bersangkutan. Di sini pemodel biasanya dituntut untuk mengorbankan salah satunya.

Hal yang lain biasanya menyangkut masalah usaha untuk memberikan tekanan yang kuat pada satu aspek dalam model yang ingin ditonjolkan yang membutuhkan analisis yang cukup kompleks. Padahal di lain pihak secara keseluruhan model yang sedang dibangun di sini sebenarnya tidaklah terlalu rumit. Menghadapi keadaan yang seperti ini maka pemodel perlu mempertimbangkan melakukan evaluasi kembali seberapa pentingkah atau seberapa besarkah kontribusi dari bagian yang akan dianalisis yang membutuhkan instrumen analisis yang kompleks tersebut terhadap performa model secara keseluruhan. Lebih jelasnya hal ini bisa dilakukan dengan melakukan pembandingan antara manfaat (*benefit*) dan pengorbanan (*cost*) dalam menggunakan berbagai jenis model yang tersedia. Walaupun hal ini tidak dilakukan secara formal namun lebih sebagai pendekatan dalam arti ukuran-ukuran yang dipakai tentu tidak presisi seperti halnya suatu kajian formal tentang analisis *cost-benefit*. Tentu saja, walaupun hal ini dilakukan secara tidak formal, di sini nantinya akan dipilih pendekatan yang menghasilkan ratio terbesar antara manfaat dan pengorbanan yang dipunyai

3. IDENTIFIKASI BERBAGAI VARIABEL YANG MENJADI FOKUS

Dalam pemodelan kadang menuntut tingkat kerincian (detil) yang cukup dalam. Untuk memenuhi kerincian ini maka pemodelan menuntut adanya sejumlah tertentu variabel yang harus dilibatkan. Dalam model-model ekonomi yang diarahkan untuk para pembelajar pemula biasanya disajikan hanya variabel-variable pokok saja. Dalam hal ini yang ingin ditekankan hanyalah pemahaman teori pada tingkat dasar dengan model yang sederhana. Sebagai gambaran dalam ranah teori konsumen biasanya disajikan hubungan atara pendapatan dengan jumlah pembelian barang. Dalam hal ini biasanya yang akan dieksplorasi adalah sebatas elastisitas pendapatan permintaan.

Sehingga bisa dikatakan di sini bahwa variabel yang menjadi fokus adalah pendapatan (*income*) dan jumlah/frekuensi pembelian.

Agak berbeda dengan hal di atas, jika perhatian pemodel adalah ingin menyajikan model yang lebih rinci maka pemodel perlu menambah dan memasukkan beberapa variabel lain yang bisa memberikan gambaran yang lebih rinci dan jelas mengenai area yang sedang dilakukan studi. Masih dalam hal area teori konsumen seorang pemodel bisa memasukkan variabel lain seperti variabel anggaran untuk konsumsi karena pendapatan tidak serta merta mendorong jumlah pembelian. Melainkan di tengah-tengahnya terdapat variabel jumlah anggaran untuk konsumsi. Seseorang bisa saja mengalami kenaikan jumlah pendapatan yang lumayan besar. Namun di lain pihak anak-anak mereka juga sudah mulai masuk sekolah tingkat SMA dan perguruan tinggi yang membeutuhkan biaya yang besar. Oleh karenanya kenaikan pendapatan yang lumayan besarnya hanya akan tersalurkan untuk biaya sekolah anak-anak mereka. Sehingga di sini terlihat bahwa anggaran/budget untuk konsumsi relatif tidak berubah walaupun pendapatan naik dengan jumlah yang cukup lumayan.

Senada dengan hal ini, masih dalam area teori konsumen, bisa jadi kenaikan pendapatan tidak serta merta meningkatkan jumlah pembelian terhadap produk tertentu. Hal yang sering terjadi justru sebaliknya. Ketika seseorang atau sekelompok orang yang mengkonsumsi barang/jasa dengan kualitas yang agak renadah dalam kurun waktu yang cukup lama. Ketika pendapatan mereka meningkat maka hal yang terjadi adalah mereka justru meninggalkan konsumsi barang tersebut. Sebagai contoh adalah sekelompok orang yang selalu menggunakan jasa kereta api kelas ekonomi. Ketika pendapatan mereka naik dengan ukuran yang cukup lumayan maka mereka justru meninggalkan jasa kereta api klas ekonomi. Mereka berganti pada jasa kereta api kelas eksekutif. Hal ini menunjukkan bahwa kuantitas pembelian tidak hanya dipengaruhi oleh budget, daya/kemampuan untuk membeli melainkan juga dipengaruhi oleh variabel lain yaitu variabel kemauan atau kebersediaan untuk membeli. Di sini pemodel bisa memasukkan variabel tersebut sebagai variabel yang menjelaskan kuantitas/frekuensi pembelian.

Dalam paparan di atas, terlihat bahwa semakin rinci kemauan pemodel untuk menjelaskan fenomena yang menjadi studi maka semakin banyak pula variabel yang menjadi fokus pembahasannya. Sebagai akibatnya adalah tingkat kerumitan yang dihadirkan juga semakin tinggi. Untuk kepentingan ini maka pemodel perlu mengidentifikasi semua variabel yang sekiranya bisa dianggap mempengaruhi dependen variabel.

4. TENTUKAN PERILAKU DASAR DARI VARIABLE YANG ADA

Dalam tahapan ini perlu diketahui bagaimana perlaku dasar dari masing-masing variabel terutama dalam kaitannya dengan variabel lain. Pemodel perlu menentukan bagaimana perilaku dasar suatu variabel dalam kaitannya dengan variabel-variabel lainnya. Misalnya jika pemodelan menggunakan pendekatan geometry maka perilaku dasar ini akan menentukan tampilan/bentuk dan juga kemiringan/ kecuraman grafik.

Selainn itu, dua buah variabel yang diangkat ke dalam pemodelan diyakini mempunyai hubungan di antara keduanya. Dalam hal ini hubungan antara dua, atau lebih, variabel akan bisa digolongkan menjadi beberapa kategori, yaitu:

a. Hubungan kausatif

Dalam hubungan ini sifat hubungan yang terjadi adalah sebab-akibat di mana variabel yang satu berperan sebagai variabel penentu yang berdiri bebas sementara variabel lainnya akan berada pada posisi yang pasif yaitu menjadi/menerima akibat dari adanya perubahan variabel yang lain.

Pada hubungan kausatif ini pada dasarnya bisa dibdakan menjadi dua, yaitu:

1). Hubungan Kausatif Positif
Hubungan dari dua variabel dikatakan hubungan kausatif positif jika satu variabel bergerak naik maka akan mengakibatkan variabel lainnya mengikuti dengan arah yang sama. Dalam hal ini variabel lainnya akan bergerak naik juga. Begitu juga sebaliknya Jika variabel yang satu bergerak turun maka hal ini akan mengakibatkan variabel lainnya bergerak turun juga.

2). Hubungan Kausatif Negatif
Dalam hubugan kausatif yang negatif ini pada dasarnya kedua variabel bergerak berlawanan arah. Jika variabel yang satu naik/

turun maka hal ini akan menyebabkan variabel yang lain mengikuti dengan cara bergerak turun/naik. Hal ini juga berlaku juga jika sebaliknya yaitu jika variabel yang satu turun/naik maka hal ini akan mengakibatkan variabel yang lain mengikuti bergerak naik/turun.

Perlu dicatat di sini bahwa hubungan yang negatif di sini tidak selalu berbanding terbalik. Hal ini perlu didampaikan karena banyak orang mempunyai anggapan bahwa hubungan negatif selalu dimaknai sebagai berbanding terbalik. Sebagai ilustrasi adalah paparan berikut ini:

$$Y = -aX$$

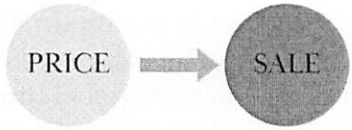
Pada fungsi di atas bisa dilihat bahwa a adalah slope dari grafik, dY/dX, yang besarnya negatif yang menunjukkan hubungan negatif antara Y dan X. Meskipun hubungan antara Y dan X adalah negatif namun hall itu tidak bisa dikatakan berbanding terbalik. Sifat hubungan diantara mereka adalah berbanding lurus karena karakteristik grafiknya adalah linier yang jika digambarkan akan berbentuk garis lurus.

Berbeda dengan hal di atas, coba cermati hubungan berikut ini:

$$Y = c/X$$

Fungsi di atas mempunyai slope, dY/dX, sebesar $-c/X^2$. Jelas terlihat di sini bahwa arah dari slope adalah negatif, namun jika grafik tersebut digambarkan tidak mempunyai bentuk garis lurus melainkan sebuah garis lengkung ke bawah dan bersifat asymptotik terhadap sumbu horizontal. Oleh karenanya di sini bisa dikatakan bahwa Y berbanding terbalik dengan X.

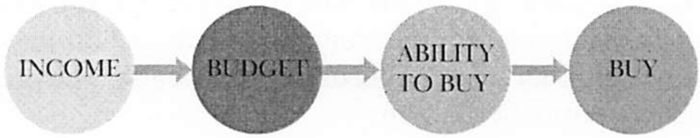
Dalam pembahasan ini terdapat satu hal yang perlu mendapatkan catatan yaitu bahwa hubungan kausatif bisa berlangsung secara langsung namun juga bisa terjadi secara tidak langsung. Hubungan yang langsung terjadi ketika efek dari variabel sumber berdampak langsung pada variabel sasaran. Hal ini ditunjukkan oleh diagram berikut ini.



Gambar 3.1.

Gambar di atas menunjukkan bahwa variabel harga (price) mempunyai pengaruh langsung kepada jumlah penjualan.

Adapun hubungan yang tidak langsung terjadi ketika efek dari variabel sumber akan dirasakan terlebih dahulu oleh variebel-variabel antara yang setelahnya baru berimbas pada variabel tujuan. Sebagai ilustrasi adalah gambaran sebagai berikut.



Gambar 3.2.

Gambar di atas menunjukkan pengaruh yang tidak langsung dari varaibelincome (pendapatan) kepada keputusan untuk membeli (Buy)

Dalam diagram di atas terlihat bahwa efek dari perubahan income tidaklah langsung dirasakan keputusan untuk membeli namun dia akan mempengaruhi lebih dahulu variabel-variabel budget, *ability to buy* (kemampuan untuk membeli) dan baru terakhir mempengaruhi keputusan untuk membeli.

b. Hubungan Korelatif

Selain hubungan kausatif seperti sudah dipaparkan di atas, masih ada jenis hubungan yang lain dalam ranah pemodelan yaitu hubungan korelasional. Dalam hubungan korelasional ini tidak bisa ditentukan variabel mana yang menjadi sumber dan variabel mana yang berperan sebagai variabel sasaran. Namun yang terjadi variabel-variabel ini bergerak bersama-sama yang membentuk hubungan positif maupun negatif.

Dalam hal ini secara umum hubungan korelatif bisa digolongkan menjadi dua, yaitu hubungan korelatif kategorial dan hubungan korelatif non kategorial.

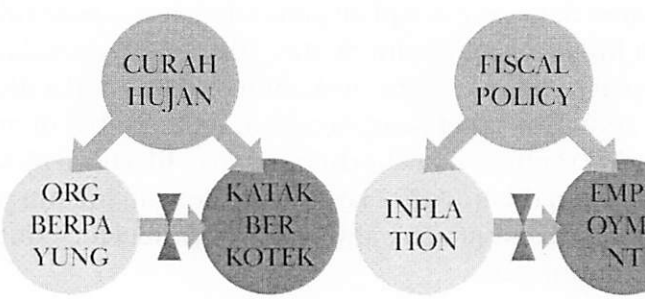
1). Hubungan korelatif non kategorial

Dalam hubugan jenis ini alur hubungan antara variabel satu dan variabel lainnya bisa dirunut, walaupun sifat hubungannya bukan sebab-akibat (kausatif). Hal ini bisa demikian karena dalam setting hubungan ini terdapat adanya variabel sumber yang direspon oleh kedua variabel. Sebagai ilustrasi adalah adanya hubungan antara frekuensi orang berpayung dan banyaknya katak berkotek. Secara lebih khusus bisa dijabarkan bahwasanya di suatu tempat di mana terdapat banyak orang berpayung di situ banyak terdengar suara katak berkotek. Contoh di ranah ekonomi bisa ditemui jika di suatu daerah/negara dengan tingkat inflasi yang lumayan tinggi (walau tidak sampai *hyperinflation*) maka biasanya bisa ditemukan di daerah/negara tersebut terdapt adanya tingkat pemekerjaan (*employment*) yang tinggi.

Walaupun fakta menunjukkan seperti adanya hubungan langsung di antara variabel-variabel tersebut namun orang tidak bisa mengatakan bahwa orang berpayung menjadi penyebab dari adanya katak berkotek, atau sebaliknya. Begitu juga tidak bisa dikatakan bahwa tingginya tingkat pemekerjaan (*employment*) disebabkan oleh tingginya tingkat inflasi, atau sebaliknya.

Hubugan dengan karakteristik seperti digambarkan di atas secara umum bisa dikatakan bahwa terdapat adanya satu sumber yang menyebabkan dua akibat secara langsung. Dalam kasus orang berpayung dan katak berkotek bisa dikatakan bahwa sumber dari peristiwa ini adalah curah hujan yang menyebabkan secara langsung pada jumlah orang yang berpayung dan di lain pihak juga menyebabkan banyaknya katak berkotek. Sementara dalam kasus hubungan antara inflasi dan pemekerjaan (*employment*) bisa ditemukan bahwa variabel yang menjadi sumber adalah kebijakan fiskal yang ekspansif yang menyebabkan dua variabel lainnya, inflasi dan pemekerjaan (*employment*) terpengaruh.

Karakteristik hubungan yang terjadi seperti kasus-kasus yang disajikan di atas bisa ditunjukkan oleh diagram berikut ini.



Gambar 3.3.

2). Hubungan korelatif non kategorial

Selain hubungan korelatif yang kategorial seperti dipaparkan di atas, terdapat pula adanya hubungan korelatif yang kategorial. Karkteristik dari hubungan ini biasanya tidak bisa dirunut adanya sumber yang sama yang menjadi penyebab. Hal ini biasanya disarikan dari tabel berikut ini.

Tabel 3.1.

#JAM TDR DLM 24JAM / KONDISI NGANTUKAN	NORMAL	TINGGI	TOTAL
TIDAK NGANTUKAN	70	30	100 (100%)
NGANTUKAN	30	70	100 (100%)
TOTAL	100 (100%)	100 (100%)	100 (100%)

Dari tabel di atas kemudian bisa dilakukan analisis dengan menggunakan statistika (Kai-Kuadrat) untuk mengetahui apakah variabel "kondisi ngantukan" dan variabel "jumlah Jam tidur dalam 24 jam" berhubungan satu sama lain.

Dalam setting hubungann yang seperti ini sama sekali tidak bisa dirunut variabel apa yang menjadi sebab bersama seperti dalam kasus curah hujan dan kebijakan fiskal ekspansif di atas. Bahkan huungan yang diklaim terjadi pada kasus ini hanya merupakan konsekuensi statistika saja. Dalam hal ini hubungan yang terjadi,jika ada, didasarkan pada hukum probabilita yang mengatakan bahwa dua buah kejadian (*event*) dikatakan *independent* (bebas/ tidak berhubungan) jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

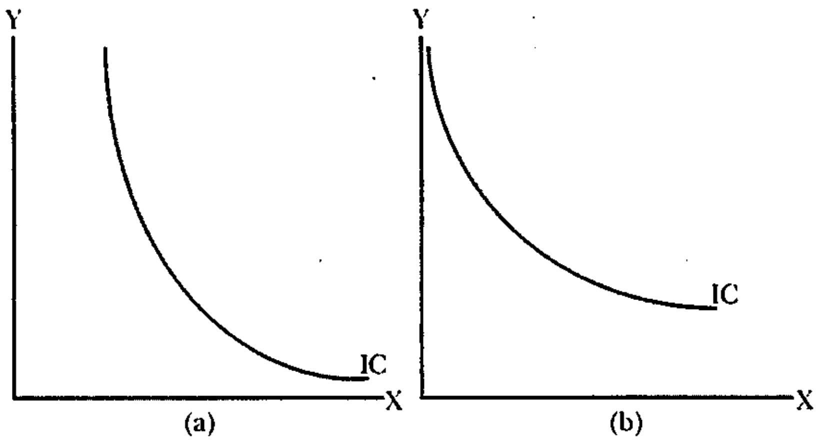
Paparan data yang disajikan pada tabel di atas akan dikonfrontir dengan hukum probabilita di atas. Jika data-data dalam tabel di atas sesuai dengan hukum probabilita di atas maka disimpulkan bahwa kedua variabel yang disajikan dalam tabel di atas adalah *independent* (bebas/tidak berhubungan).. Jika hasil uji konfrontir menunjukkan tidak adanya kesesuaian dengan hukum probabilita di atas maka disimpulkan bahwa kedua variabel tersebut *dependent* atau berhubungan.

Jadi jelas di sini sifat hubungan yang terjadi tidak bisa menunjukkan adanya variabel di tengah yang menjadi sumber bersama (*co-source*).

5. KENALI SIFAT DAN KARAKTERISTIK UTAMA YANG AKAN DITONJOLKAN.

Dalam pembahasan di depan sudah disinggung mengenai perlunya menampilkan variabel-variabel yang menjadi fokus ke dalam model yang akan dibangun. Dalam kesempatan ini akan dibahas lebih lanjut mengenai karakteristik utama yang perlu ditonjolkan dalam suatu model. Sebagai gambaran adalah contoh-contoh model ekonomi yang mempunyai karakteristik yang sengaja ditonjolkan guna memberikan gambaran yang jelas mengenai teori ekonomi.

Salah satu model ekonomi yang utama dan menjadi landasan dalam pebelajaran ekonomi adalah kurva *indifferent.* Kurva ini berbicara mengenai preferensi dari seorang individu tertentu. Karena dia berbicara mengenai preferensi maka dia harus bisa memuat sebanyak mungkin informasi mengenai preferensi. Dalam hal ini kurva indifferent harus mampu menunjukkan ke mana preferensi seorang individu lebih mengarah: ke salah satu produk atau pada produk lainnya. Hal ini bisa dilihat pada grafik berikut ini.



Gambar 3.4.

Pandanglah kedua panel dalam gambar di atas. Keduanya adalah kurva *indifferent.* Di sana kurva indifferent mempunyai tampilan yang berbeda. Pada panel (a) mempunyai ekor (*tail*) yang mendekat pada sumbu X dan kepala (*head*) yang menjauh dari sumbu Y. Sebaliknya pada panel (b) yang terjadi adalah sebaliknya, kurva *indifferent* di sana mempunyai ekor yang menjauh dari sumbu X dan mempunyai kepala yang mendekat pada sumbu Y. Hal ini mempunyai maksud untuk merepresentasikan preferensi yag berbeda. Pada panel (a) dia merepresentasikan preferensi yang lebih menyukai barang X dibanding barang Y. Sedangkan pada panel (b) hal yang terjadi adalah sebaliknya di mana individu yang bersangkutan lebih menyukai barang Y daripada barang X. Pesan yang bisa disampaikan di sini adalah bahwasanya model dari kurva indifferent ini mampu menunjukkan perbedaan preferensi di antara individu yang berbeda.

Berbeda dengan hal di atas, marilah di sini kita kupas sedikit mengenai fungsi produksi Cobb-Douglas yang diekspresikan sebagai berikut ini.

$$Q = K^{\varepsilon} L^{\beta}$$

Jika dilakukan maksimisasi hasil dengan memfokuskan pada K saja maka hal ini bisa dilakukan dengan cara standar, yaitu :

$$\frac{dQ}{dK} = \alpha K^{\varepsilon-1} L^{\beta}$$

$$\frac{dQ}{dK} = \alpha \frac{K^{\varepsilon}}{K} L^{\beta}$$

$$\frac{dQ}{dK} = \alpha \frac{Q}{K}$$

Lihatlah hasil akhir dari differensiasi di sana. Dia menghasilkan suatu ekspresi yang netral dari L. Hal ini juga akan terjadi jika dilakukan differensiasi terhadap L maka hasilnya akan netral terhadap K. Hal ini memberikan makna bahwa untuk melakukan maksimisasi output Q dengan mengubah K atau L saja, maka hal itu tidak akan memberi efek apapun terhadap pemakaian input lainnya. Hal inilah yang disebut sebagai kondisi yang sepenuhnya *seperable*. Dalam teori ekonomi kondisi *seperable* dimaknai sebagai proses produksi yang sepenuhnya mempunyai efek yang terpisah antara efek dari perubahan K maupun efek dari dari perubahan L. Perubahan pada penggunaan K atau L tidak memberi imbas apapun pada pemakaian faktor produksi yang lain.

Jika hal ini dipandang dari perspektif empiris maka keadaan yang sepenuhnya *seperable* ini hampir pasti tidak bisa ditemui pada proses produksi yang cukup maju (*advance*) di mana proses produksi menggunakan teknologi yang maju/*advance*. Dengan teknologi yang maju/*advance* seseorang akan menghadapi kesulitan untuk memisahkan efek dari perubahan K dengan efek perubahan penggunaan L, begitu juga sebaliknya. Dengan demikian fungsi produksi Cob-Douglas tidak mampu sepenuhnya merepresentasikan proses produksi pada kegiatan manufacturing yang menggunakan teknologi berproduksi dengan level yang maju/*advance*. Hal ini tentu saja perlu memperoleh perhatian khusus dari para pemodel ketika akan menyusun model empirik yang akan digunakan untuk tujuan estimasi atau bahkan prediksi. Hal ini dikhawatirkan akan terjadi adanya bias dan hal-hal lain yang tidak dikehendaki pada sifat-sifat statistik dari hasil estimasi maupun prediksinya.

6. PENENTUAN STRATEGI PEMODELAN

Langkah yang penting dalam pemodelan adalah menentukan strategi pemodelan. Hal ini biasanya terkait dengan pemodelan empiris yaitu pemodelan yang dimaksudkan untuk melakukan uji empiris atas suatu teori ataupun hipotesis.

Masalah yang sering muncul dalam hal ini adalah efektifitas dalam mengeksploasi issue-issue yang ada dalam area yang bersangkutan. Lebih khusus lagi ketika model yang terbangun kemudian digunakan untuk melakukan prediksi dan bahkan simulasi maka tentu akan bersinggungan dengan issue-issue statistika dan ekonometrika seperti apakah spesifikasi model sudah tepat, kalau tidak tepat hal ini akan menimbulkan bias spesifikasi.

Dalam hal penentuan strategi pemodelan ini, pemodel dihadapkan pada pilihan untuk memodelkan dengan data cross section atau dengan data runtun waktu (time series). Termasuk di sini adalah pemilihan pemodelan di mana model nantinya akan diestimasi dengan teknik-teknik time series. Teknik estimasi berbasis time series biasa digunakan pada kasus-kasus di mana kesesuaian dengan teori tidak menjadi issue yang sensitif. Dalam pemodelan *time series* hal yang terpenting adalah ketepatan hasil estimasi, yang diturunkan dari model, mendekati pergerakan data secara baik.

Sedangkan strategi pemodelan dengan menggunakan data *cross section* akan lebih cocok ketika model yang ada memerlukan dukungan yang kuat dari teori yag ada. Hal ini disebabkan karena tidak jarang pemodelan jenis ini digunakan untuk melakukan pengujian dari suatu teori ataupun hipotesis.

Dalam penentuan strategi pemodelan, issue yang lain adalah menyangkut pendekatan yang akan dipilih. Hal ini menyangkut pemilihan metode yang dianggap paling tepat untuk menelurkan hasil yang terbaik. Sebagai gambaran adalah apakah model akan dikonstruksikan dengan struktur *comparative-static* ataukah dengan struktur yang sepenuhnya *dynamic*. Kedua struktur ini diyakini bisa menangkap efek dinamik ada. Dalam struktur yang pertama hal ini dikonstruksikan dengan memasukkan variabel lag (beda-kala). Variabel lag ini biasanya dimodelkan dengan cara menghadirkan lag yang terdistribusi menurut waktu (*distributed lag model*). Dengan cara tersebut hal ini diharapkan bisa menangkap efek dinamik yang terjadi pada setiap irisan waktu tertentu yang berbeda. Pemodelan dengan cara seperti ini dianggap sudah cukup memadai ketika data penelitian menggunakan seri waktu yang satuan waktunya menggunakan periode yang cukup panjang. Namun ketika seri data waktu yang ada terkonstruksi dalam satuan waktu dengan periode yang pendek dan bahkan sangat pendek maka upaya pengirisan waktu dengan variabel lag akan kurang efektif. Dalam kasus yang terakhir ini strategi yang paling cocok adalah dengan menggunakan persamaan differensial dari waktu (*differential equation of time*). Dengan cara ini efek dari perubahan variabel dalam satuan waktu yang bahkan mengalir tanpa henti (dalam satuan detik) pun bisa ditangkap dengan baik.

IV

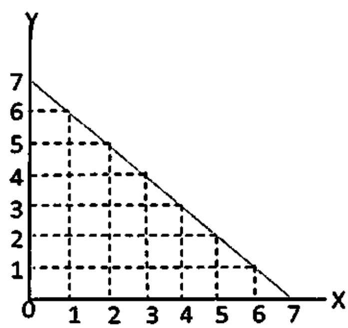
MEMBANGUN MODEL

Pembahasan dalam bab ini akan menyajikan semua hal yang menyangkut tentang pembangunan model. Pembangunan model di sini tentunya akan menggunakan prinsip prinsip yang telah dikemukakan pada bab-bab sebelumnya. Untuk alasankerapian sistematika, pada setiap akhir dari proses pembangunan suatu model akan dilakukan suatu validasi singkat dan bersifat teknis mengenai kecocokan dan kepantasan dari model yang dibangun tersebut. Adapun di akhir bab ini akan disajikan suatu validasi besar yang sifatnya menyeluruh hingga sampai menyentuh pada falsafah yang terkandung dalam setiap model.

Pemodelan dalam bab ini akan meliputi model yang murni dibangun sendiri dan juga terdapat model yang sifatnya terdikte dari definisi-definisi yang ada (*implicated*). Secara umum pemodelan yang akan dilakukan berikut ini menggunakan pendekatan geometrik. Sedangkan dalam pemodelan terimpilkasi di belakang nanti akan lebih banyak menggunakan alat-alat analisis dari aljabar maupun kalkulus.

1. Memodelkan *Opportunity Cost* dan *Trade-Off*

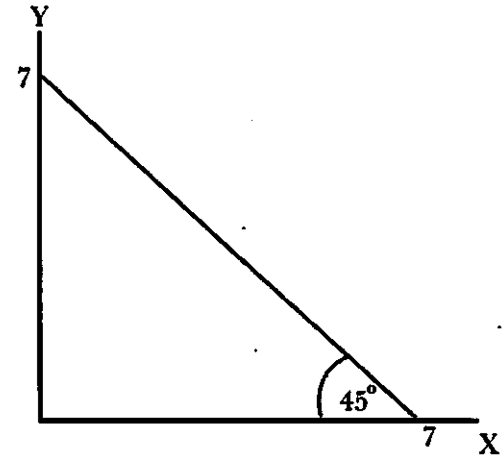
Hubungan yang bersifat trade-off telah menjadi bagian dalam ilmu ekonomi. Hal ini sesuai dengan sifat dari ilmu ekonomi yang pada dasarnya menemukan pilihan yang terbaik di antara berbagai alternatif yang ada. Hubungan tersebut jika diekspresikan ke dalam suatu grafik maka akan terlihat seperti gambar beriku ini.



Gambar 4.1.

Grafik di atas merupakan pemodelan tentang apa saja yang mana X dan Y mempunyai hubungan yang sangat khusus yaitu bahwasanya setiap kali X naik sebesar satu skala maka Y harus turun sebesar satu skala juga. Informasi yang lain yang bisa dieksplorasi dari model di atas adalah jumlah X secara sendirian maksimum sebesar 7, begitu juga jumlah Y secara sendirian maksimum adalah sebesar 7 pula. Selain itu pada setiap titik pada garis model menunjukkan bahwa nilai X dan nilai Y jika dijumlahkan akan menghasilkan nilai 7.

Karena sifat hubungannya yang satu lawan satu, yang artinya satu unit tambahan harus diimbangi dengan pelepasan (*gave-up*) satu unit barang yang lain maka grafiknya bisa secara ringkas digambarkan seperti berikut ini.



Gambar 4.2.

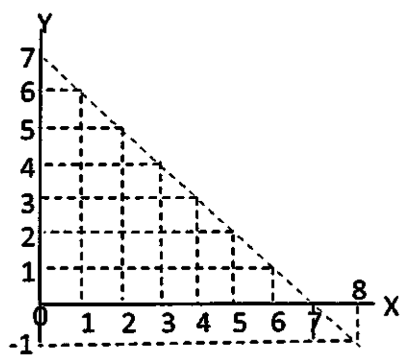
Garis kotak-kotak yang menunjukkan sakala mengenai jumlah barang lain yang harus dilepas sebagai akibat penambahan jumlah barang yang diinginkan sebesar satu unit dalam grafik 5.2. sudah tidak ada lagi. Sebagai gantinya dihadirkan tanda sudut 45 derajad pada salah satu sudut kaki dari segitiga yang terbentuk. Sudut 45 derajad ini menunjukkan bahwa jika dihitung nilai tangen dari sudut tersebut maka akan menghasilkan nilai satu. Hal ini menunjukkan bahwa *gradient* dari garis tersebut adalah satu yang berarti bahwa kenaikan barang Y sebesar satu unit harus dikompensasi dengan kenaikan barang X sebesar satu unit pula.

Selanjutnya sekarang ini kita akan mencari ilustrasi yang riil mengenai model di atas. Anggap di sini misalnya seorang penyelenggara event akan menyediakan hadiah kepada pemenang dengan cara di mana pemenang memperoleh sebanyak 7 buah barang baik X semua ataupun Y semua atau kombinasi antara keduanya. Kesemua alternatif yang ada bisa digambarkan dalam gambar di atas.

Dengan karakteristik seperti di atas, hal itu menunjukkan bahwa hubungan dimulai dari X yang artinya semua hadiah diambil dalam barang X semua dengan jumlah 7 atau kombinasi-koombinasi seperti berikut ini

Barang X	Barang Y	Jumlah
7	0	7
6	1	7
5	2	7
4	3	7
3	4	7
2	5	7
1	6	7
0	7	7

Dengan paparan di atas sekaligus menunjukkan bahwa hubungan yang ada adalah sangat ketat di mana tidak ada kemungkinan terjadinya hal seperti grafik berikut ini di mana besarnya X adalah 8 unit dan Y sebesar (-1). Walaupun kombinasi tersebut jika dijumlahkan akan tetap menghasilkan sebesar 7 unit, namun hadiah barang Y sebanyak minus satu (1) tidak bisa didefinisikan.



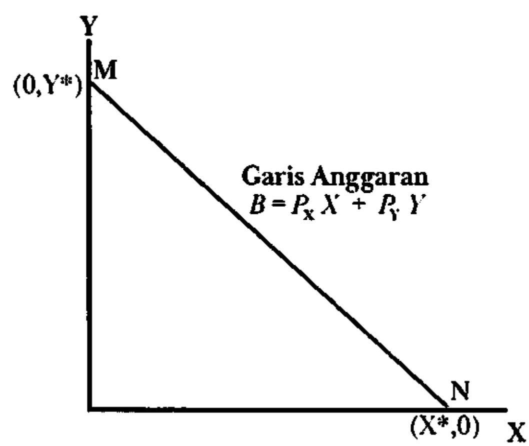
Gambar 4.3.

Jika dicermati lebih mendalam lagi bisa diketahui bahwasanya penambahan salah satu dari barang yang tersedia menuntut adanya pengorbanan berupa ditinggalkannya barang yang lain sebesar satu unit juga. Karakter/sifat yang seperti ini biasa disebut sebagai *trade-off.* Di lain pihak *trade-off* selalu menimbulkan konsekuensi berupa adanya "kehilangan". "Kehilangan" seperti ini bisa dirasakan tidak lain dari adanya satu unit barang yang lain, katakanlah Y, yang harus ditinggalkan (*gave-up*) untuk memperoleh tambahan barang yang diinginkan, katakanlah X, sebesar satu unit. Jika mempunyai barang Y dianggap sebagai pendapatan ataupun harta (*wealth*) maka kehilangan satu unit barang Y yang dikorbankan untuk memperoleh satu unit barang X tidak lain adalah *opportunity cost* yang ditanggung oleh individu yang bersangkutan dalam rangka memperoleh satu unit tambahan barang X.

Dalam ranah ekonomi terdapat beberapa kasus seperti yang sedemikian itu sebagaimana berikut ini.

a. Garis anggaran (*budget line*) dan *Isocost.*

   Garis budget merupakan materi bahasan yang sangat populer dalam ilmu ekonomi khususnya dalam ekonomi mikro. Garis budget menginformasikan/menggambarkan jumlah maksimum uang yang bisa dibelanjakan untuk membeli barang yang ada yang dalam kasus klasik hanya disediakan dua, X dan Y, saja. Anggaplah bahwa jumlah uang yang disediakan adalah sebesar B. Dengan uang sejumlah ini maka bisa dibelanjakan untuk membeli barang Y semua (0, Y*) hingga dibelikan barang X semua (X*,0). Semua titik yang berada pada garis baudget yang membentang dari titik M ke titik N menggambarkan jumlah pengeluaran sejumlah B.

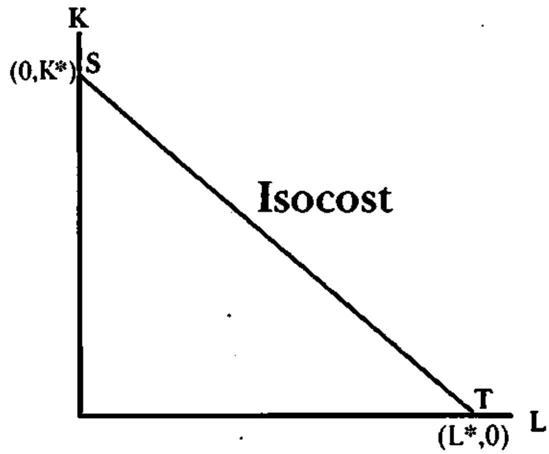


Gambar 4.4.

Selain garis anggaran sebagaimana dipaparkan di atas juga ada kurva *isocost* yang mempunyai sifat-sifat yang sama dengan garis anggaran.

b. Kurva *Isocost*

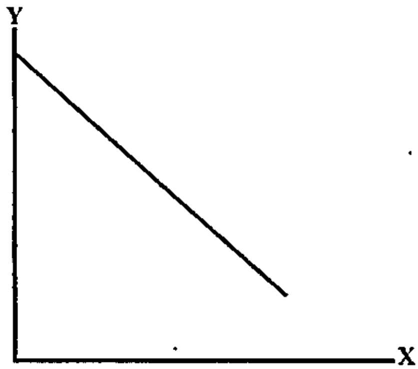
Selain garis anggaran sebagaimana dipaparkan di atas juga ada kurva *isocost.*



Gambar 4.5.

Kurva isocost sebagaimana dipaparkan pada gambar di atas dia membawa berbagai sifat yang hampir semuanya sama dengan garis budget.

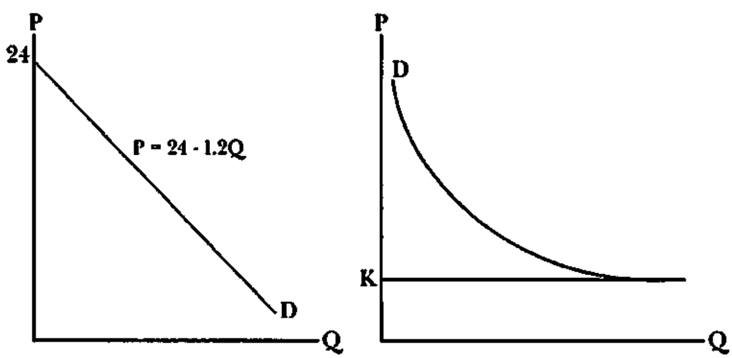
Dengan mengacu pada Gambar 4.5. dan 5.6. maka penggambaran garis anggaran maupun *isocost* haruslah tepat seperti yang ada dalam gambar-gambar tersebut di atas. Sebagai catatan dalam area ini, banyak sekali penulis buku yang kurang begitu menaruh perhatian tentang hal yang nampaknya kecil dan sepele tersebut. Tidak jarang mereka menggambarkan baik garis anggaran maupun *isocost* seperti yang ada pada Gambar 4.3. atau Gambar 4.6. di bawah ini di mana ujung dari garis budget maupun kurva *isocost* tidak menyentuh sumbu horizonthal. Penggambaran yang seperti ini memberikan pemaknaan yang sangat berbeda.



Gambar 4.6.

2. Memodelkan Hubungan Negatif

Sebagaimana hubungan yang menggambarkan *trade-off/opportunity cost*, dalam ekonomi juga sangat banyak ditemui adanya hubungan yang bersifat negatif. Contoh-contoh mengenai hubungan yang negatif ini adalah kurva permintaan, kurva *indifferent*, kurva *isoquant* , kurva Phillip dan masih banyak lagi.Kurva permintaan jika digambarkan akan nampak seperti kurva yang digambarkan pada Gambar 4.6. di atas. Secara resmi kurva permintaan direpresentasikan sebagai berikut.



Gambar 4.7.

Dalam grafik di atas kurva permintaan diekspresikan dalam dua bentuk. Pada panel sebelah kanan diberikan salah satu varian dari kurva permintaan di mana tidak disertakan bentuk fungsinya. Oleh karena itu orang bisa menggambarkannya menurut kehendaknya. Sekarang anggap bahwa bentuk fungsi dari kurva tersebut adalah:

$$P = K + \frac{1}{Q}$$

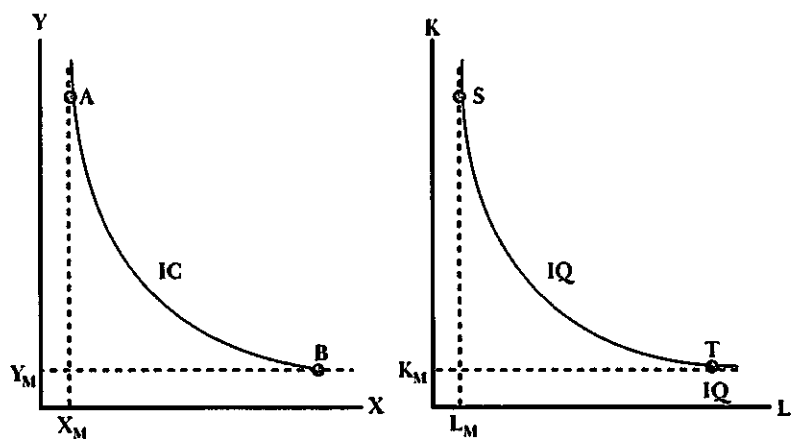
$$dengan\ \frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{Q^2} < 0$$

Di sini bisa dilihat bahwa P = K adalah persamaan garis asymptot yang mencegah grafik fungsi permintaan (demand) tidak bisa menyentuh garis P = K walaupun arah grafiknya menurun. Implikasinya adalah bahwa grafik fungsi permintaan jenis ini tidak akan menyentuh sumbu horisonthal. Hal ini memberikan implikasi juga bahwa grafik tersebut tidak bisa dikatakan sebagai merepresentasikan adanya hubungan *opportunity Cost/Trade-Off.*

3. Memodelkan Hubungan Negatif vs. Opportunity Cost/ Trade-Off

Antara model hubungan negatif dan *Opportunity Cost/Trade-Off* jika dibandingkan mereka serupa tapi tidak sama, sekilas pintas sama namun jika dicermati diantara mereka terdapat perbedaan yang membedakan. Pada seksi ini akan dilakukan eksplorasi untuk mengetahui perbedaan antara keduanya.

Ilustrasi mengenai hal tersebut bisa dilihat pada grafik di bawah ini.



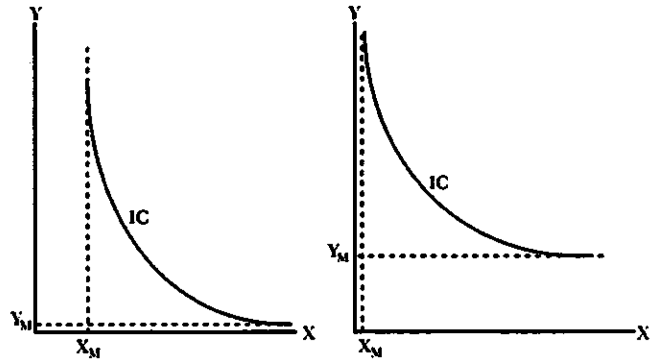
Gambar 4.8.

Kita ikuti sekarang panel sebelah kiri dari grafik di atas. Kurva IC terlihat meluncur dari kiri atas menuju kanan bawah yang menunjukkan *gradient* atau angka arah grafik tersebut adalah negatif. Namun begitu, tingkat kecepatan meluncurnya semakin berkurang ketika grafik semakin berada pada posisi yang lebih rendah. Bahkan grafik berhenti menurun setelah mencapai titik B. Dilihat dari titik A ke titik B terlihat bahwa terjadi *trade-off* antara Y dan X. Namun dilihat dari titik B ke kanan atau dari titik A ke atas tidak bisa ditemui adanya *trade-off* anatar kedua barang. Dengan begitu maka grafik tersebut gagal untuk bisa dikatakan sebagai menunjukkan hubungan *trade off/opportunity cost.*

Karena karakteristik yang seperti itu, di mana grafik tidak menyentuh salah satu sumbu maka hal ini dipahami bahwa tidak ada hubungan *trade-off/opportunity cost.* Aturan yang seperti ini kemudian bisa digunakan untuk merepresentasikan hubungan yang negatif namun tidak terdapat adanya *trade-off/opportunity cost.* Sebagai gambaran adalah gambar grafik fungsi permintaan pada panel sebelah kiri pada Gambar 4.6. di mana kurva permintaan (*demand*) direpresentasikan secara spesifik melalui fungsinya. Dalam hal ini penggambaran dari grafiknya sudah didiktekan oleh fungsi yang ada di mana penggal (*intercept*) dari grafik tersebut terdapat pada P = 24. Sementara jika dicari titik potong pada sumbu horizontal akan diperoleh pada titik Q = 20. Namun demikian gambar dari grafik fungsi permintaan tersebut sengaja tidak dipotongkan dengan sumbu horizonthalnya. Hal ini untuk menunjukkan bahwa hubungan dari kedua variabel yang ada, P dan Q, bukanlah hubungan yang bersifat *trade-off/opportunity cost.* Namun demikian grafik fungsi permintaan (*demand*), ataupun apapun itu, tetap bisa digambarkan secara tertutup dengan memotongkan kedua ujung grafik pada sumbu-sumbu yang bersangkutan. Hal ini bisa dilakukan ketika hal itu ditujukan untuk melakukan analisis yang membutuhkan ketepatan ukuran (*precision*) grafik.

4. Memodelkan Kecenderungan Preferensi terhadap suatu Barang

Kurva *indifferent* (IC) pada Gambar 4.8. serta berbagai variannya yang ada membawa konten mengenai preferensi. Sekarang ini kita tertarik untuk memodelkan bagaimana preferensi seseorang yang bias kepada salah satu barang bisa direpresentasikan melalui sebuh grafik. Grafik di bawah ini menerangkan hal ini.



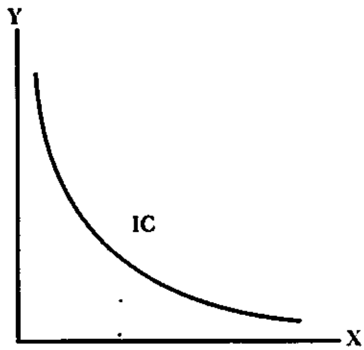
Gambar 4.9.

Pada panel sebelah kiri menginformasikan bahwa jumlah barang Y minimum yang ingin tetap dipunyai oleh individu yang bersangkutan adalah sejumlah Y_M yang mana bisa dilihat pada panel sebelah kiri bahwa jumlah tersebut adalah sangat kecil. Hal ini mengindikasikan bahwa individu yang bersangkutan masih bersedia menukarkan barang Y dengan barang X ketika jumlah barang Y yang dipunyai tinggal sedikit, walaupun pertukaran tersebut semakin sulit.

Sekarang akan kita lihat bagaimana sikap individu yang bersangkutan terhadap barang X. Pada panel tersebut terlihat bahwa jumlah barang X minimum yang ingin tetap dipertahankan untuk punyai oleh individu yang bersangkutan adalah sejumlah X_M yang mana jumlah tersebut masih bisa dikatakan relatif banyak. Terlihat bahwa pada jumlah barang X sebesar X_M yang masih relatif besar individu yang bersangkutan sudah tidak mau lagi melakukan pertukaran antara barang X untuk diganti dengan barang Y.

Hal seperti digambarkan ini menunjukkan bahwa individu yang bersangkutan mempunyai preferensi yang bias pada kepemilikan barang X daripada memiliki barang Y. Dengan demikian hal ini bisa digunakan sebagai patokan untuk membangun suatu model tentang preferensi yang lebih menyukai barang X daripada memiliki barang Y. Secara lebih khusus bisa dikatakan bahwa panel sebelah kiri menunjukkan preferensi yang lebih menyukai untuk mempunyai barang X daripada mempunyai barang Y. Sementara hal yang sebaliknya terjadi pada panel sebelah kanan. Sebagai pedoman adalah jika suatu kurva *indifferent* mempunyai ekor (bagian yang di bawah) yang mendekati sumbu X maka bisa dikatakan bahwa preferensi yang dibawa menunjukkan preferensi yang lebih menyukai barang X. Sebaliknya jika suatu kurva *indifferent* mempunyai kepala/*head* maka bisa dikatakan bahwa preferensi yang dibawa menunjukkan preferensi yang lebih menyukai barang Y.

Sedangkan jika kurva indifeerent digambarkan sebagai grafik berikut ini,

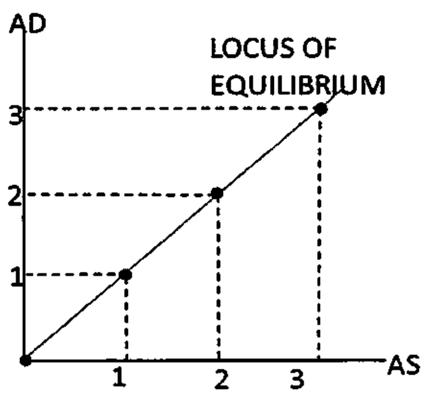


Gambar 4.10.

maka preferensi yang dibawa kurang lebih menunjukkan keberimbangan antara mempunyai kedua barang yang ada.

5. Memodelkan Keseimbangan Output

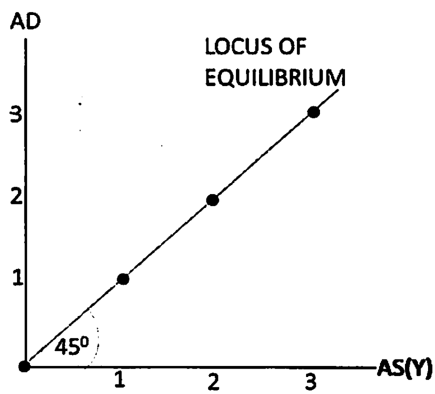
Dalam ranah ekonomi makro salah satu topik materi adalah keseimbangan output. Keseimbangan output ini biasa diformulasikan sebagai kesamaan antara Pasokan agregat dan permintaan agregat, AS = AD. Keseimbangan ini bisa pada grafik berikut ini:



Gambar 4.11.

Gambar 4.11. memberikan informasi bahwa setiap titik yang berada pada grafik merupakan titik *equilibrium* (keseimbangan), karena setiap titik yang ada pda grafik tersebut memberikan nilai yang sama antara nilai AS dan AD. Oleh karenanya grafik yang ada bisa dipandang sebagai tempat kedudukan (*locus*) dari semua keseimbangan yang ada.

Secara teknis, penampakan dari garis patah-patah (*dashed lines*) baik yang mendatar maupun yang tegak kadang mengganggu ketika grafik tersebut disajikan untuk tujuan analisis. Hal ini dikarenakan dalam berbagai analisis dihadirkan pula berbagai grafik yang dibutuhkan dalam analisis tersebut. Untuk menghidari adanya keruwetan penampakan dalam setiap analisis maka biasanya grafik yang ada pada Gambar 4.11. disajikan kembali dengan penampilan yang lebih sederhana sebagaimana grafik berikut ini.



Gambar 4.12

Sekali lagi hilangnya garis putus-putus pada Gambar 4.11. di atas diganti dengan kemunculan tanda sudut 45 derajad. Sudut 45 derajad menunjukkan bahwa nilai *gradient* dari grafik yang dimaksud adalah satu yang berarti kenaikan AS sebesar berapapun akan diikuti dengan kenaikan AD dengan jumlah yang sama. Dengan cara ini grafik tersebut menjamin bahwa setiap titik yang ada padanya akan terus menunjukkan keseimbangan output.

6. Memodelkan Karakteristik Teknologi dalam Proses Produksi

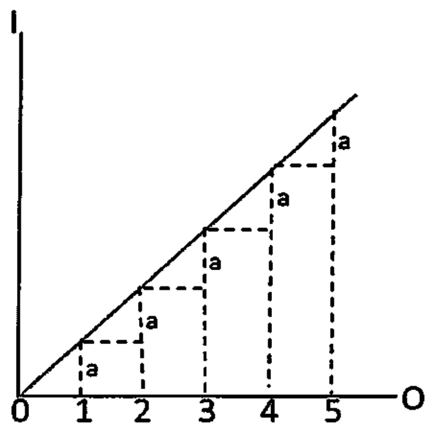
Teknologi berproduksi yang di dalamnya terdapat mekanisme bagaimana biaya produksi terbentuk dan bagaimana dia mengalami perubahan. Dua mekanisme tersebut sepintas lalu sangat mirip, namun jika dicermati maka terdapat perbedaan yang mendasar. Teknologi lebih merupakan faktor pendorong terjadinya perubahan biaya produksi sedangkan biaya produksi lebih merupakan variabel dependen dari teknologi (*state of technology*).

Teknologi berproduksi mempunyai ciri khas yang berbeda-beda satu sama lain. Bahkan bisa jadi dalam area produksi di mana dua buah atau lebih teknologi dipakai oleh perusahaan yang berbeda namun menghasilkan pola efisiensi yang tidak sama. Hal ini disebabkan oleh budaya yang sudah tertanam sejak lama yang tidak bisa dihilangkan begitu saja.

Oleh karenanya bisa didapati beberapa karakteristik dari teknologi berproduksi dan konsekuensinya terutama terhadap biaya dan efisiensi. Berikut ini akan disajikan berbagai model mengenai karakteristik dari teknologi tersebut.

a. Memodelkan Proses Produksi tanpa Adanya Perbaikan

Untuk memulai pemodelan tentang proses produksi dengan perbaikan (*improvement*) untuk waktu awal ini akan disajikan terlebih dahulu tentang proses produksi di mana tidak ada perbaikan ataupun peningkatan efisiensi. Hal ini bisa dilihat pada garfik berikut ini.

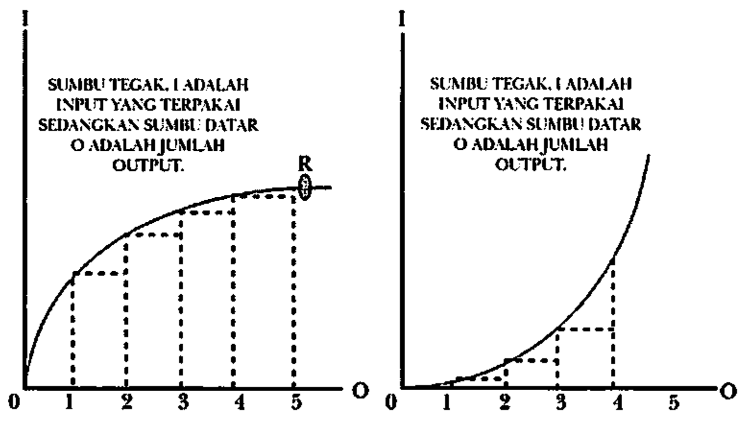


Gambar 4.13.

Grafik di atas sumbu horizonthalnya menunjukkan Output dan sumbu vertikalnya menunjukkan pemakaian input, yang keduanya diukur dalam level. Pada Gambar 4.13. di atas bisa dilihat bahwa pemakaian input adalah tetap yaitu sebesar a untuk setiap tambahan satu unit yang diproduksi. Dengan begitu bisa disimpulkan bahwa tidak terdapat adanya perbaikan dalam pemakaian input untuk berproduksi. Hal ini juga menunjukkan bahwa tidak terdapat perubahan efisiensi dalam area berproduksi.

b. **Memodelkan Proses Produksi dengan Perbaikan (*Improvement*)**

Sebagai perbandingan terhadap kasus yang disajikan pada seksi sebelumnya di sini disajikan suatu model yang menunjukkan adanya perbaikan atau peningkatan efisiensi. Hal ini bisa dilihat pada grafik yang ada pada Gambar 4.14. di bawah ini. Di sana bisa dibaca bahwa setiap kali peningkatan output sebesar satu unit akan menyebabkan peningkatan jumlah input yang dibutuhkan dengan jumlah yang semakin menurun. Peningkatan output dari 1 menjadi dua membutuhkan tambahan output sebesar b. Untuk peningkatan pada jumlah output yang lebih besar dari itu dibutuhkan tambahan input dengan jumlah yang semakin mengecil. Di sini bisa dibandingkan dengan kasus yang disajikan dalam Gambar 4.13. di mana setiap tambahan satu unit output yang diproduksi jumlah input yang dibutuhkan adalah konstan sebesar a. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa teknologi yang digunakan dalam proses produksi sebagaimana disajikan pada Gambar 4.14. di bawah ini dianggap bisa menciptakan efisiensi.

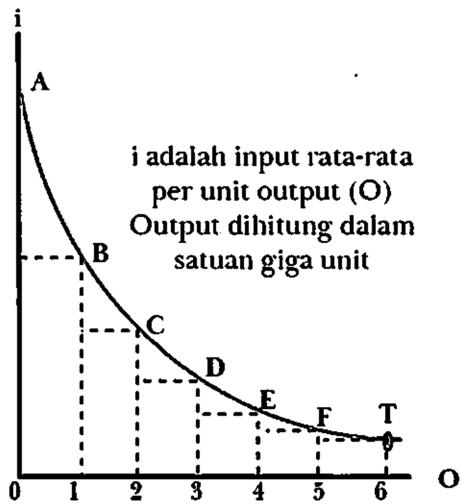


Gambar 4.14.

c. **Perbaikan (Improvement) yang Terus Menurun**

Karakteristik teknologi yang bersifat teknologi keras yang biasanya menempel (*embedded*) pada peralatan atau permesinan kebanyakan menunjukkan pola yang mana di awal waktu ketika dia pertama kali diaplikasikan dia bisa memberikan efek yang baik. Namun kemudian seiring dengan berjalannya waktu kemampuan atau performanya akan terus mengalami penurunan sedikit demi sedikit. Dalam jangka waktu yang panjang tidak dirasakan tahu-tahu performanya sudah mengalami banyak penyusutan. Pola yang demikian bisa digambarkan seperti grafik berikut ini.

Pada Gambar 4.15. di bawah ini terlihat bahwa pada awal waktu teknologi diaplikasikan terjadi perbaikan yang sangat substansial. Hal ini bisa dilihat dari penggunaan input produksi rata-rata, per unit output, yang turun dari tadinya sebesar A menjadi hanya sebesar B. Penurunan pemakaian input rata-rata per unit output ini tidak lain adalah sebuah penghematan yang bisa dilakukan sebagai akibat dari pemakaian teknologi yang bersangkutan.



Gambar 4.15.

Dengan seiring berjalannya waktu tingkat perbaikan ini akan mengalami penurunan yang terus menerus yang ditunjukkan oleh penghematan input rata-rata yang dipakai dalam produksi. Dalam hal ini tingkat penghematan yang terjadi mengalami penurunan yang terus menerus hingga pada titik T. Pada titik tersebut penghematan yang ada sudah habis dalam arti sudah tidak mungkin terjadi penghematan yang bisa dilakukan lagi setelahnya. Hal ini ditunjukkan oleh grafik yang sudah mendatar pada titik T ke arah kanan.

d. Pemodelan Alternatif pada Perbaikan (Improvement) yang Terus Menurun

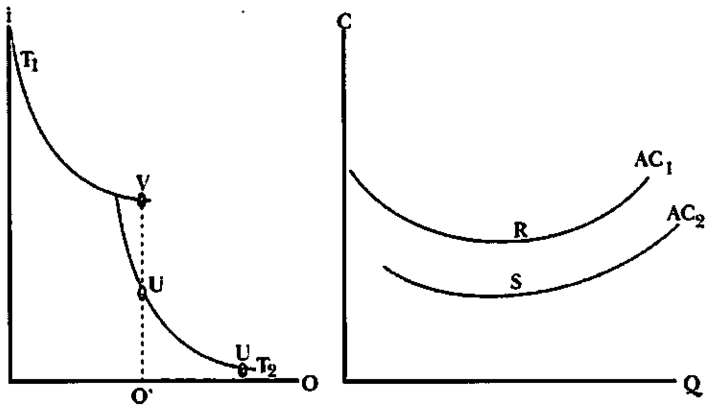
Grafik yang digambarkan dalam Gambar 4.15. di atas memberikan informasi yang tepat sama dengan apa yang disajikan pada Gambar 4.14 panel sebelah kiri. sebelumnya. Hal ini bisa jadi membingungkan para mereka yang belum terbiasa dengan bahasa pemodelan. Bagaimana bisa sebuah grafik yang mempunyai bentuk yang berbeda bisa membawa konten informasi yang sama. Sebaliknya bagi orang yang sudah biasa dalam pemodelan hal itu tidak mengherankan. Karena bagi para pemodel, mereka pertamakali akan melihat bagaimana definisi-definisi mengenai sumbu-sumbu (*axis*) yang ada. Jika dicermati secara teliti terlihat terdapat perbedaan yang mencolok pada definisi sumbu yang ada pada Gambar 4.14 panel sebelah kiri. dan yang ada pada Gambar 4.15.

Jika dilihat pada sumbu tegak dari keduanya terlihat keduanya memang sama sama dituliskan dengan angka dasar i. Namun dalam grafik yang ada pada Gambar 4.14 panel sebelah kiri. angka dasar i dituliskan dengan huruf besar (*capital*), yang didefinisikan sebagai jumlah pemakaian input dalam level. Adapun pada grafik yang ada pada Gambar 4.15. hal itu dituliskan dengan angka dasar i tetapi dalam bentuk huruf kecil (*lower Case*) yang didefinisikan sebagai jumlah pemakaian input rata-rata per unit output. Hal inilah yang menyebabkan penampakan grafik di antara keduanya berbeda walaupun mereka sebenarnya membawa informasi yang tepat sama.

e. Memodelkan Perubahan Teknologi dan Implikasinya pada Biaya

Dalam berproduksi seringkali manajemen berusaha untuk tetap mempertahankan terjadinya perbaikan (*improvement*). Hal ini sering didengan sebagai slogan yang terkenal sebagai perbaikan yang berkelanjutan (*continous improvement*). Dalam semangat untuk mengimplementasikan konsep perbaikan yang berkelanjutan ini manajemen selalu menaruh perhatian terhadap kemunculan berbagai teknologi yang dipandang bisa memberikan perbaikan pada proses produksi mereka. Kebutuhan untuk mencari teknologi baru tersebut sangat kuat ketika posisi tingkat penghematan yang terjadi sudah semakin menipis yang kurang lebih dalam Gambar 4.15. di atas berada pada titik D.

Jika teknologi baru diperkenalkan lagi dalam area produksi maka tentunya akan bisa memberikan tingkat perbaikan, dalam bentuk penghematan pemakaian input, yang semakin besar lagi. Hal ini bisa dilihat pada gambar berikut ini.

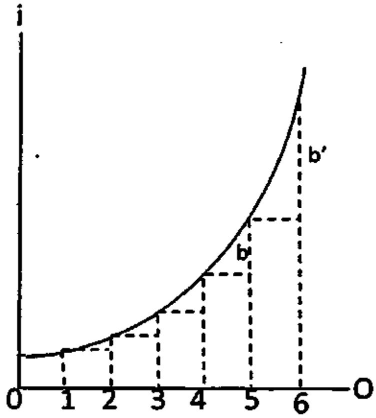


Gambar 4.16.

Perubahan teknologi yang dibawa oleh teknologi baru menyebabkan penghematan yang tadinya hanya terjadi dengan tingkat yang kecil dan akan terus mengecil, sekarang berubah menjadi besar lagi. Hal ini bisa dilihat dalam grafik dalam Gambar 4.16. di atas. Dalam gambar ini ditunjukkan adanya efek dari teknologi lama (T_1) dan efek dari teknologi baru(T_2). Dalam hal ini jika produksi direncanakan sebesar O' maka perusahaan akan mempunyai pilihan teknologi: teknologi lama (T_1) atau teknologi baru (T_2). Jika pilihan jatuh pada teknologi lama maka jumlah pemakaian input rata-rata per unit adalah sebesar V dan biaya produksi rata-rata akan sebesar R (pada panel sebelah kanan) . Jika sebaliknya pilihan teknologi jatuh pada teknologi baru maka pemakaian input rata-rata per unit output adalah sebesar U dan dengan biaya produksi rata-rata sebesar S (pada panel sebelah kanan).

f. Memodelkan Inefisiensi yang semakin memburuk

Pada seksi ini akan dibangun suatu model yang merupakan kebalikan dari model perbaikan yang terus menurun sebagaimana ditunjukkan pada 5.15. di atas. Hal ini bisa dilihat pada grafik berikut ini.

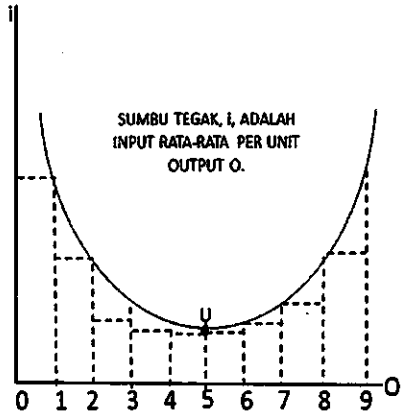


Gambar 4.17.

Pada gambar di atas terlihat bahwa terjadi peningkatan penggunaan input rata-rata per unit output pada level prduksi yang lebih tinggi. Hal ini memberikan informasi bahwa proses produksi yang terjadi mengalami ketidak-efisienan yang terus memburuk. Hal ini bisa dilihat dari fakta grafiknya di mana kenaikan output dari 4 (empat) unit menjadi 5 (lima) unit membutuhkan tambahan input sebesar b. Sedangkan kenaikan produksi dari 5 (lima) unit menjadi 6 (enam) unit membutuhkan tambahan input sebesar b' di mana b' lebih besar daripada b. Jika dilihat ke belakang terlihat bahwa untuk menaikkan level produksi sebesar 1 (satu) unit pastinya membutuhkan kenaikan input yang jumlahnya lebih kecil dari b. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa dalam proses produksi ini terdapat inefisiensi yang semakin memburuk.

g. Memodelkan Efisiensi dengan Anti Klimaks

Salah satu bentuk efisiensi yang sering terjadi dalam proses produksi adalah efisiensi yang berakhir dengan antiklimaks. Bentuk ini mirip dengan model perbaikan yang semakin menurun. Namun di sini penurunannya tidak berhenti setelah tidak ada penghematan lagi melainkan dia terus berkelanjutan sehingga proses produksi yang tadinya efisien berbalik menjadi inefisiensi. Proses ini bisa dilihat pada gambar berikut ini.



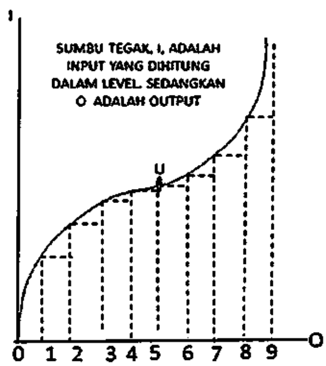
Gambar 4.18.

Pada gambar di atas menunjukkan adanya efisiensi sebagaimana yang terjadi pada kasus perbaikan yang terus menurun. Bedanya dalam kasus yang pertama penghematan berhenti dan setelah itu perjalanan efisiensinya mendatar. Sedangkan pada kasus ini terjadi titik balik yang menunjukkan proses yang tadinya efisien berubah menjadi tidak efisien. Titik balik ini terjadi pada titik U dengan jumlah unit yang diproduksi sebesar 5 (lima) unit.

Dalam ranah ekonomi banyak ditemui hal-hal seperti yang dipaparkan di atas. Sebagai contoh adalah grafik dari biaya produksi rata-rata (AC) yang digambarkan sebagai grafik parabolik yang berbentuk lengkung membuka ke atas.Walaupun grafik ini hanya menunjukkan perilaku biaya produksi rata-rata namun hal itu sekaligus menunjukkan kondisi teknologi berproduksi yang dipakai. Dalam hal ini teknologi yang dipakai menunjukkan perilaku di mana pada periode-periode awal dia mampu mengeksplorasi efisiensi secara terus menerus. Namun tingkat efisiensi yang berhasil dieksplorasi dalam proses tersebut semakin menurun dan menurun terus hingga bahkan sifat produksi yang efisien berubah menjadi inefisien. Hal ini ditunjukkan oleh grafik yang berbalik menanjak setelah, untuk beberapa waktu, berjalan menurun terus.

h. Perbandingan antar Model

Selanjutnya di sini akan dilakukan perbandingan antar model. Dalam hal ini model yang akan dibandingkan adalah model dengan pendekatan rata-rata dan model dengan pendekatan level. Model dengan pendekatan rata-rata diwakili oleh model yang disajikan pada grafik dalam Gambar 4.18. di mana sumbu vertikalnya didefinisikan sebagai input rata-rata per unit output. Di sana grafik yang terbangun berbentuk grafik parabolik dengan nilai ekstremum minimum. Sebaliknya model pembanding di sini adalah model yang disajikan pada grafik yang ada dalam Gambar 4.19 berikut ini di mana sumbu vertikalnya didefinisikan sebagai input produksi dalam level.



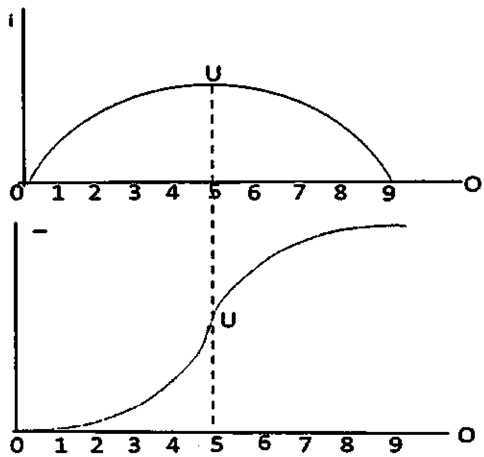
Gambar 4.19.

Pada grafik yang berada dalam Gambar 4.18. terlihat bahwa terdapat titik balik grafik pada titik U pada level produksi sebesar 5 (lima) unit. Titik belok U tersebut bertepatan dengan titik belok pada grafik yang berada dalam Gambar 4.19. di mana di sana juga disebutkan bahwa titik belok U berada pada level produksi sebanyak 5 (lima) unit juga. Jika dicermati lebih lanjut Gambar 4.19. terdiri dari dua buah segmen. Segmen pertama berawal dari titik (0,0) ke kanan atas hingga sampai titik U dan segmen kedua bermula dari titik U ke kanan. Segmen pertama menunjukkan proses di mana terjadi efisiensi dalam berproduksi sebagaimana yang disajikan dalam Gambar 4.14. panel sebelah kiri. Sedangkan segmen kedua bisa dipandang sebagai proses di mana produksi yang ada mengalami inefisiensi yang semakin memburuk sebagaimana ditunjukkan pada grafik yang ada pada Gambar 4.14. panel sebelah kanan. Ketika kedua segmen tersebut disambungkan tepat pada titik U maka bisa dikatakan bahwa proses tersebut adalah proses produksi yang efisien dengan anti klimaks pada titik U. Dengan demikian grafik yang ada pada Gambar 4.18. membawa informasi yang tepat sama dengan proses yang digambarkan oleh grafik yang ada pada Gambar 4.19.

Setelah mencermati pembahasan mengenai proses yang direpresentasikan dalam grafik yang ada dalam Gambar 4.18. dan Gambar 4.19. maka kini kita bisa menarik suatu hubungan antara keduanya yang bisa dirangkum dalam suatu rule of thumb yaitu bahwasanya pendekatan melalui konsep rata-rata (Gambar 4.18) memberikan kesetaraan hasil dengan pendekatan melalui konsep level.

i. **Memodelkan Inefisiensi dengan Perbaikan**

Pemodelan sebagaimana ditunjukkan oleh grafik yang ada pada Gambar 4.18. dan 5.19. mempunyai varian lain. Varian yang dimaksud adalah hal yang berlaku sebaliknya. Gambar 4.18. mempunyai padanan grafik parabolik yang tengkurap ke bawah dengan nilai ekstremum yang maksimum. Sedangkan grafik pada Gambar 4.19 mempunyai padanan yang berupa grafik dengan bentuk huruf S.



Gambar 4.20.

Dengan karakteristik yang bisa dilihat di atas maka proses tersebut bisa dikatakan sebagai inefisiensi dengan perbaikan

7. Pemodelan Terdikte (*dictated modelling*)

Terlihat dalam seksi-seksi sebelumnya bahwa model yang terbangun berasal dari hasrat aktif dari pemodel. Bahkan terdapat suatu kasus yang dimodelkan melalui dua cara yang berbeda namun menggambarkan hal yang sama. Di sini terlihat bahwa pemodel mempunyaii kebebasan dalam membangun model yang dikehendaki.

Sebaliknya dalam pemodelan terdikte (*dictated modelling*) di sini pemodel tidak mempunyai kebebasan dalam menentukan model seperti apa yang akan disajikan. Melainkan mereka harus patuh pada definisi-definisi yang menjadi dasar dari model yang bersangkutan. Dalam pemodelan yang terdikte terdapat beberapa sumber yang berperan sebagai pendikte (*dictator*), yaitu definisi, teori dan *A priori.*

a. Pemodelan Terdikte oleh Definisi

Dalam pemodelan jenis ini definisi mempunyai peran sentral dalam mmenentukan model. Berikut ini akan dipaparkan berbagai contoh mengenai pemodelan jenis tersebut.

1). Pemodelan kurva AC dan MC

Berikut ini adalah definisi mengenai biaya rata-rata:

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

di mana AC, TC dan Q secara berurutan adalah biaya rata-rata, biaya total dan jumlah produksi.

Berdasar definisi tersebut bisa dilakukan analisis yang pada akhirnya nanti akan ditemukan model untuk biaya rata-rata (AC) dan juga biaya marjinal (MC). Berikut ini langkah-langkah yang dilakukan.

$$\frac{dAC}{dQ} = \left(\frac{dTC}{dQ}Q - TC\right)\frac{1}{Q^2}$$

$$\frac{dAC}{dQ} = \left(\frac{dTC}{dQ} - AC\right)\frac{1}{Q}$$

$$\frac{dAC}{dQ} = (MC - AC)\frac{1}{Q}$$

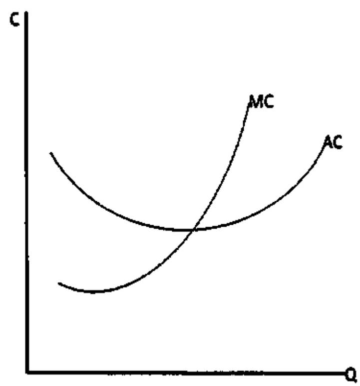
$\frac{dAC}{dQ}$ tidak lain adalah slope dari kurva AC yang menentukan arah dari kurva AC. Dengan demikian bisa dikonstruksikan pola jalur arah pergerakan kurva AC dan MC sebagai berikut:

- Jika MC < AC, maka MC – AC < 0 yang berarti slope AC < 0 dan arah dari pergerakan kurva AC adalah turun
- Jika MC = AC, maka MC – AC = 0 yang berarti slope AC = 0 dan arah dari pergerakan kurva AC adalah stationer.
- Jika MC > AC, maka MC – AC > 0 yang berarti slope AC > 0 dan arah dari pergerakan kurva AC adalah naik

Berdasar pada semua temuan di atas maka selanjutnya bisa dikonstruksikan arah gerak kurva MC dan AC secara bersama-sama,yaitu: ketika MC < AC maka arah dari kurva AC adalah menurun. Selanjutnya ketika ukuran mereka sama, MC = AC, yang artinya mereka saling berpotongan maka kurva AC berada dalam keadaan stasioner dan mencapai nilai ekstremumnya (positif atau negatif). Kemudian ketika MC > AC maka arah dari kurva AC naik. Dengan demikian bisa ditemukan catatan penting yaitu bahwa kurva MC selalu memotong kurva AC tepat pada nilai ekstremum dari AC.

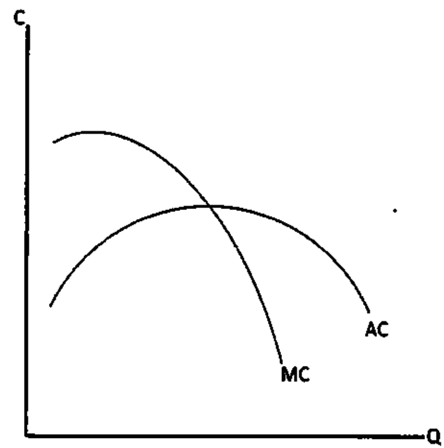
Berdasar temuan arah grafik AC di atas maka pembangunan model kurva AC dan MC bisa dilakukan, dengan mengenakan asumsi terhadap karakteristik teknologi yang dipakai dalam berproduksi.

- Jika asumsi teknologi produksi mengikuti model efisiensi dengan antiklimaks (Gambar 4.18/Gambar 4.19) maka penampakan grafik AC dan MC bisa dilihat sebagai berikut ini.



Gambar 4.21.

• Jika sebaliknya teknologi produksi mengikuti model inefisiensi dengan perbaikan (Gambar 4.20) maka penampakan grafik AC dan MC bisa dilihat sebagai berikut ini.



Gambar 4.22.

Ketika dihadapkan pada dua buah model, orang akan menjadi bingung menentukan model mana yang paling baik dalam arti paling cocok/pas menggambarkan perilaku biaya-biaya yang menjadi perhatian. Untuk keperluan ini akan dibahas dalam validasi model pada seksi di belakang nanti.

2). Pemodelan AC, AFC, AVC

Selain AC dan MC masih terdapat definisi lain yang menentukan model grafiknya, yaitu AFC (*average fixed cost*) dan AVC (*average variabel cost*). Mereka ini didefinisikan sebagai:

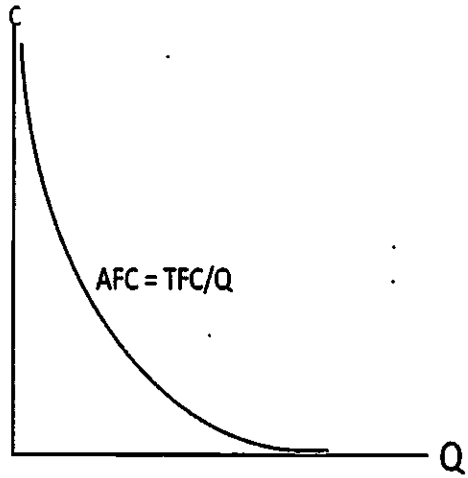
$$AC = AFC + AVC$$

$$\frac{TC}{Q} = \frac{TFC}{Q} + \frac{TVC}{Q}$$

Dalam teori biaya, perilaku biaya tetap total (*Total fixed cost*) ditentukan sebagai tidak berubah berapapun jumlah yang diproduksi dalam domain jumlah produksi tertentu. Jumlah produksi tertentu di sini dipahami sebagai jumlah yang cukup besar untuk suatu industri. Dengan perilaku yang didefinisikan demikian maka definisi aljabar dari AFC (Averaged *fixed cost*) bisa ditentukan seperti berikut ini:

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

Karena jumlah TFC sudah tertentu sedangkan AFC didefinisikan seperti di atas maka bisa dikatakan bahwa grafik AFC mengikuti pola fungsi pecah yang penampakannya bisa dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 4.23.

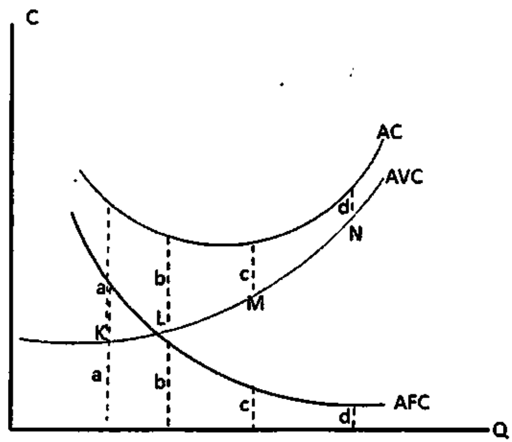
Pada gambar di atas terlihat bahwa pada jumlah output yang rendah ukuran AFC adalah besar. Ketika jumlah produksi semakin meningkat maka ukuran AFC menjadi semakin rendah dan terus rendah hingga secara teoretik bisa mendekati nol.

Dengan karakteristik perilaku AC dan AFC yang digambarkan seperti di atas maka pada akhirnya orang bisa menentukan besar AVC berdasar ukuran AC dan AFC Perlu diketahui juga bahwa definisi yang dipaparkan pada salah satu persamaan di atas bisa dituliskan lagii sebagai:

$$AVC = AC - AFC$$

Dengan berlandasakan pada definisi yang diekspresikan pada persamaan di atas berikut ini bisa disajikan proses bagaimana kurva AVC dibangun. Pertama, temukan terlebih dahulu jarak AFC dari sumbu horisonthal (ambil hanya pada empat titik saja). Kedua, ukurkan secara vertikal jarak tersebut dari kurva AC dan tandai mereka dengan titik-titik K, L, M, N. Selanjutnya hubungkan titik-titik tersebut hingga membentuk suatu kurva. Kurva yang terbentuk ini tidak lain adalah kurva AVC sebagaimana disajikan pada grafik berikut ini.

Terlihat di grafik tersebut bahwa sebenarnya AVC adalah "sisa" dari pengurangan AFC terhadap AC. Pengertian "sisa" di sini mungkin bisa memancing pertanyaan, karena hal ini bergantung siapa yang didahulukan setelah penentuan AC. Namun dalam kacamata pemodelan, AVC tidak bisa ditentukan terlebih dahulu secara mandiri seperti AFC karena dia tidak mempunyai fungsi aljabaris yang terdefinisi secara kuat dan pasti. Oleh karenanya mencari AVC tidak bisa dilakukan secara langsung melainkan secara tidak langsung melalui pengurangan AFC terhadap AC sebagaimana didektekan oleh defnisi di depan.



Gambar 4.24.

3). Pemodelan TC

Dalam ilmu ekonomi tentang biaya tidak ada arahan mengenai bentuk kurva dari biaya total TC. Kurva dari biaya total (TC) merupakan implikasi yang terjadi dari biaya total rata-rata (AC) yang barusan ditemukan di atas. Dengan menggunakan definisi yang ada, AC dimaknai sebagai:

$$AC = TC / Q$$
$$TC = AC \times Q$$

Dengan demikian maka model untuk biaya total, TC, mempunyai bentuk fungsi di mana derajad polinomialnya lebih tinggi satu derajad jika dibandingkan dengan fungsi AC. Sekarang di sini perlu kiranya untuk memperkiran bentuk fungsi dari grafik AC yang sudah ditemukan di atas. Untuk fungsi AC yang membuka ke atas bisa dipastikan bahwa bentuk fungsinya adalah fungsi parabolik (kuadratik) dengan nilai ekstremum yang minimum dan nilai *discriminant* yang tidak riil (imajiner) yang menyebabkan dia tidak mempunyai akar persamaan dan oleh karenanya grafiknya tidak mempunyai titik potong dengan sumbu horisonthal. Dengan karakteristik yang seperti ini maka bentuk fungsi AC bisa dituliskan sebagai berikut:

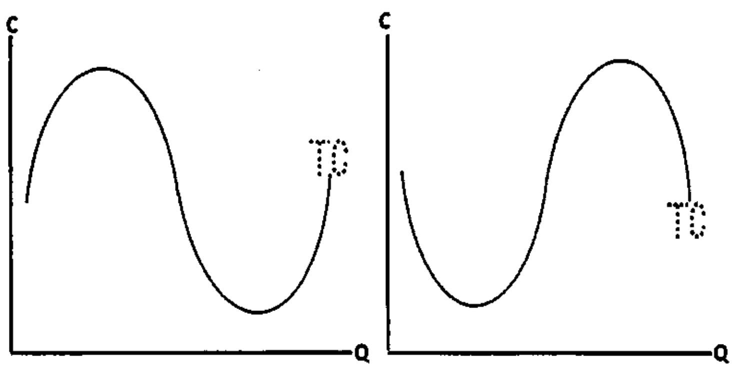
$$AC = AQ^2 + BQ + C$$
$$\text{dengan nilai } A > 0 \text{ dan } (B^2 - 4AC) < 0$$

Dengan ekspresi fungsional seperti yang disajikan di atas maka sekarang bisa dituliskan fungsi biaya total, TC, sebagai berikut ini:

$$TC = AQ^3 + BQ^2 + CQ + D$$

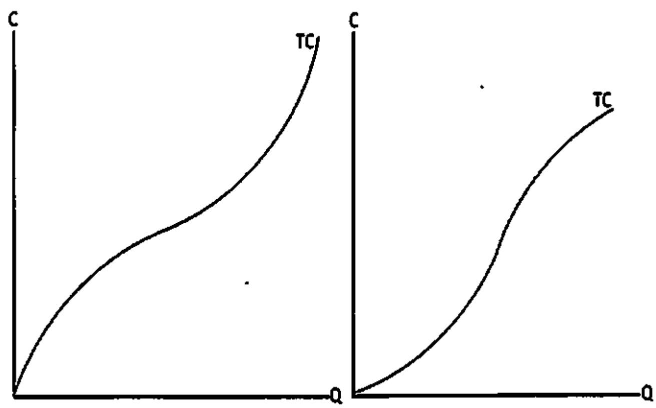
Berdasarkan pada ekspresi fungsi biaya total, TC, di atas maka ada beberapa kemungkinan mengenai bentuk grafik fungsi dari biaya total, TC, tersebut yaitu:

Alternatif I



Gambar 4.25

Alternatif II



Gambar 4.26.

Pada alternarif I terlihat terdapat dua grafik fungsi kubik (pangkat tiga). Namun mereka tertolak semua karena tidak sesuai dengan intuisi ekonomi. Sementara pada alternatif II grafik fungsi lebih menunjukkan ketersesuaian dengan teori. Argumen penolakan ataupun penerimaan ini akan dibahas pada seksi validasi model di belakang nanti. Oleh karenanya tanda "TC" pada Gambar 4.25. dituliskan dalam huruf bintik-bintik dengan maksud bahwa hal itu tidak merupakan grafik biaya total, TC, yang sebenarnya.

4). Memodelkan hubungan MC dan TVC

Dari topik-topik pemodelan yang sudah dipaparkan di depan masih ada yang belum dieksplorasi di sini yaitu hubungan antara biaya marjinal, MC, dan biaya variabel total, TVC. Hal ini akan dieksplorasi pada pemaparan berikut ini.

Ingat lagi hasil yang sudah didapat di depan yaitu:

$$\frac{dAC}{dQ} = (MC - AC)\frac{1}{Q}$$

Sekarang akan ditelusuri lagi slope fungsi biaya rata-rata, AC. Hal ini bisa dilakukan dengan menghadirkan definisi mengenai biaya total, TC.

$$TC = TFC + TVC$$

Di mana TC, TFC dan TVC secara berurutan adalah biaya total, biaya tetap total dan biaya variabel total. Definisi ini setara dengan:

$$\frac{TC}{Q}=\frac{TFC}{Q}+\frac{TVC}{Q}$$

$$AC=AFC+AVC$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{d}{dQ}\left(\frac{TFC}{Q}+\frac{TVC}{Q}\right)$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{d}{dQ}\left(\frac{TFC}{Q}\right)+\frac{d}{dQ}\left(\frac{TVC}{Q}\right)$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q^2}\left[\left(\frac{dTFC}{dQ}Q-TFC\right)+\left(\frac{dTVC}{dQ}Q-TVC\right)\right]$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q}\left[\left(\frac{dTFC}{dQ}-AFC\right)+\left(\frac{dTVC}{dQ}-AVC\right)\right]$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q}\left[(0-AFC)+\left(\frac{dTVC}{dQ}-AVC\right)\right]$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q}\left[\left(\frac{dTVC}{dQ}-AFC-AVC\right)\right]$$

$$\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q}\left[\left(\frac{dTVC}{dQ}-AC\right)\right]$$

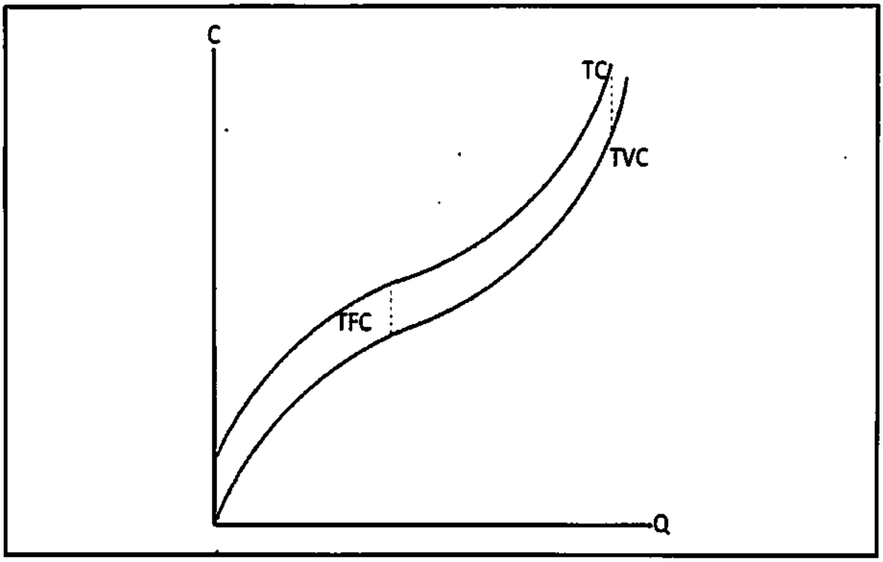
Dengan menyamakan hasil yang diperoleh terdahulu dan hasil yang sekarang maka dengan demikian,

$$(MC-AC)\frac{1}{Q}=\frac{dAC}{dQ}=\frac{1}{Q}\left(\frac{dTVC}{dQ}-AC\right)$$

Sehingga,

$$MC=\frac{dTVC}{dQ}$$

Ekspresi terakhir di atas merupakan hubungan antara MC dan *slope* dari TVC. Secara lebih khusus bisa dikatakan bahwa *slope* dari grafik biaya total, TC, yaitu MC sama dengan slope dari grafik biaya variabel total, TVC. Hal ini bisa dilihat pada gambar-gambar berikut ini.



Gambar 4.27.

Pada Gambar 4.27. di atas terlihat bahwa TC dan TVC bentuknya sama persis, yang membedakan antara keduanya adalah titik pangkal grafik. TVC berpangkal pada titik asal (0,0) sementara TC berpangkal pada pada titik (0,F). Celah antara TC dan TVC tidak lain adalah biaya tetap total, TFC. Karena bentuk grafik biaya total, TC, dan biaya variabel total, TVC, adalah sama persis maka bisa dipastikan bahwa keduanya mempunyai *slope* yang sama sebagaimana ditunjukkan oleh ekspresi terakhir di atas.

5). Pemodelan TR, MR

Model yang sangat populer dalam ilmu ekonomi milro adalah pendapatan marjinal (MR). Pendapatan marjinal ini diturunkan dari pendapatan total (TR) secara kalkulus. Untuk itu proses penemuan model ini bisa diikuti dari pemaparan berikut ini.

TR didefinisikan sebagai:

$$TR = P*Q$$

di mana P dan Q adalah harga jual barang dan jumlah/kuantitas barang yang terjual.
Di lain pihak harga (Q) tidak berdiri secara independen melainkan dia dipengaruhi oleh harga (P).

$$Q = f(P)$$

Sebelum melakukan penurunan pendapatan total (TR) untuk memperoleh pendapatan marjinal (MR) di sini perlu dipersiapkan terlebih dahulu pengertian yang perlu diketahui di depan yaitu di sini Q diposisikan sebagai variabel yang ukurannya ditentukan oleh harga (P). Sehingga proses penurunannya bisa dilakukan sebagai berikut.

$$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dP}{dQ}Q + P \qquad (4.1.)$$

$$\frac{dTR}{dQ} = \left(\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} + 1\right)P$$

$$\frac{dTR}{dQ} = \left(\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} + 1\right)P$$

$$\frac{dTR}{dQ} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)P$$

Berdasar definisi, elastisitas harga permintaan, ε, diformulasikan sebagai:

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

$$MR = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon'}\right)P \qquad (4.2.)$$

di mana $\varepsilon' = |\varepsilon|$

Dengan telah ditemukannya formulasi dari MR maka bisa dibangun hubungan antara MR,TR, ε' dan P.

Kategori Barang	ε'	$\left(1-\frac{1}{\varepsilon'}\right)$	MR	TR
Elastis	ε'>1	Positif	Positif	Naik
Unit elastic	ε'=1	Nol	Nol	Stasioner
Inelastic	ε'<1	Negatif	Negatif	Turun

Sebelum menggambarkan hubungan dari semua variabel yang disampaikan di atas dirasa perlu di sini untuk mencari status MR terhadap P dengan menggunakan hubungan yang ada pada persamaan (4.1.) di atas.

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = \frac{dP}{dQ}Q + P$$

$$\frac{dMR}{dQ} = \frac{d^2P}{dQ^2}Q + \frac{dP}{dQ} + \frac{dP}{dQ}$$

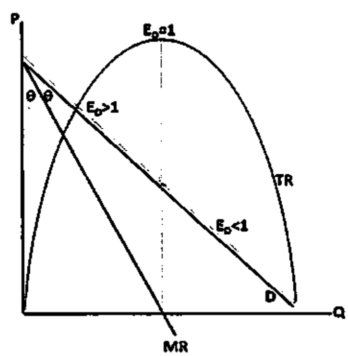
Jika fungsi permintaan diekspresikan sebagai fungsi linier maka:

$$\frac{d^2P}{dQ^2} = 0, \text{sehingga}$$

$$\frac{dMR}{dQ} = \frac{dP}{dQ} + \frac{dP}{dQ} = 2\frac{dP}{dQ} \quad (4.3.)$$

Sekarang bandingkan slope dari MR yang ada pada (4.3.) dengan slope fungsi permintaan, $\frac{dP}{dQ}$. Maka di sini bisa dilihat secara pasti bahwa slope dari MR mempunyai ukuran sebesar dua kali lipat dari slope fungsi permintaan. Hal ini bisa dilihat pada Gambar 4.28.

Berdasar pada tabel temuan-temuan di atas maka bisa dikonstruksikan model grafik dari semua variabel di atas sebagai berikut:



Gambar 4.28.

Sebagai catatan, berbagai ekspresi aljabar dan grafik di atas menunjukkan model untuk pasar secara keseluruhan bukan untuk perusahaan individual.

b. Pemodelan Terdikte Teori

Pembahasan selanjutnya di sini adalah pemodelan terdikte teori. Dalam banyak hal teori telah menjadi pijakan dalam melakukan analisis yang dalam hal ini dilandaskan padamodel tertentu. Dalam kesempatan ini teori yang akan diangkat sebagai sumber pemodelan adalah teori maksimisasi keuntungan. Ketika teori maksimisasi keuntungan ini diangkat mungkin hal ini bisa menimbulkan kritik terkait apakah hal itu merupakan teori ataukah sekedar asumsi yang diteorikan. Argumen ini muncul. Argumen ini muncul dikarenakan maksimisasi keuntungan bukanlah merupakan hasil penelitian yang secara luas dilakukan sehingga hal itu lebih tepat dikatakan sebagai asumsi yang diteorikan (Keen *et al*, 2010).

Terlepas dari perdebatan teori, di sini pendekatan akan dilakukan dengan cara menggunakan teori yang secara umum diterima dan belum tergugurkan oleh teori yang lain.

Untuk mengawali, di sini dihadirkan definisi mengenai keuntungan, yaitu:

$$\Pi = TR\,(Q) - TC\,(Q)$$

di mana Π, TR, TC berturut-turut adalah keuntungan, pendapatan total dan biaya total. Tanda Q yang ada dalam kurung di belakang TR dan TC digunakan untuk menunjukkan bahwa pendapatan total dan juga biaya total keduanya adalah fungsi dari Q. Sebagai akibatnya adalah bahwa keuntungn (Π) juga merupakan fungsi dari Q.

Selanjutnya untuk melakukan pemaksimuman fungsi keuntungan (Π), pendekatan standar akan dilakukan yaitu dengan menggunakan kalkulus yang bisa dilihat berikut ini.

$$\frac{d\Pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0$$

$$\frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ} = 0$$

$$MR = MC \qquad (4.4.)$$

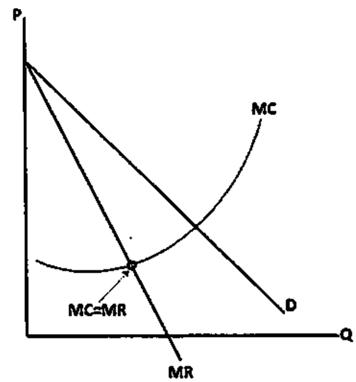
Persamaan (4.4.) merupakan kondisi atau syarat yang harus dipenuhi agar mencapai keuntungan yang maksimum. Hal ini bisa disajikan dalam satu grafik. Namun karena MR dipengaruhi oleh struktur pasar maka hal ini harus ditemukan terlebih dahulu MR untuk pasar monopoli dan pasar persaingan sempurna. Hal ini bisa dilihat pada pemaparan berikut ini.

Pasar Monopoli:

Ciri khas dari pasar monopoli adalah bahwasanya Q merupakan fungsi dari P sehingga ekspresinya adalah:

$$\frac{dTR}{dQ} = \left(\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} + 1\right)P$$

$$MR = \left(\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} + 1\right)P$$



Gambar 4.29.

Pasar Persaingan Sempurna:

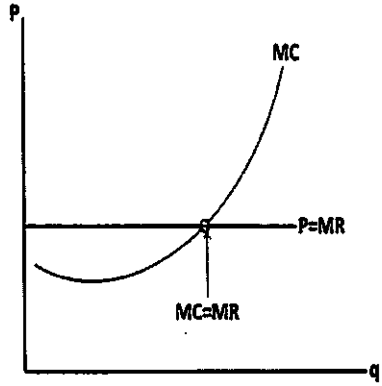
Menurut teori, salah satu karakteristik dari pasar persaingan sempurna adalah bahwasanya penjual bisa menjual berapapun jumlah yang dia suka pada tingkat harga pasar yang ada. Dengan kata lain hal itu bisa dikatakan bahwa Q bukan merupakan fungsi dari P :

$$Q \neq f(P)$$
$$dQ/Dp = 0$$

Dengan demikian maka:

$$MR = \left(\frac{dP}{dQ}\frac{Q}{P} + 1\right)P$$

$$MR = P$$



Gambar 4.30.

c. Pemodelan Terdikte Asumsi

Dalam teori ekonomi terdapat suatu asumsi dasar yang sangat kuat yang mengatakan bahwa setiap pelaku ekonomi berperilaku rasional. Seseorang dikatakan rasional jika mereka, konsumen, memaksimumkan utility dan jika mereka produsen diasumsikan untuk selalu memaksimumkan keuntungan.

Utility diasumsikan diturunkan dari mengkonsumsi barang atau jasa. Dalam dunia yang hanya terdapat dua produk, X dan Y, anggaplah begitu, fungsi utility diekspresikan sebagai:

$$U = f(X,Y)$$

Dalam memaksimumkan utility ini terdapat kendala berupa anggaran (budget) yang diekspresikan secara aljabar sebagai:

$$B = P_X X + P_Y Y$$

Selanjutnya untuk memaksimumkan utility digunakan cara standar yaitu dengan pendekatan Lagrangian:

$$\ell = f(X,Y) + \lambda(B - P_X X - P_Y Y$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial X} = f_X(X,Y) - \lambda P_X = 0 \rightarrow \lambda = \frac{f_X(X,Y)}{P_X} \quad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial Y} = f_Y(X,Y) - \lambda P_Y = 0 \rightarrow \lambda = \frac{f_Y(X,Y)}{P_Y} \quad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = B - P_X X - P_Y Y \quad \text{(c)}$$

Menyamakan persamaan (a) dan persamaan (b) diperoleh:

$$\frac{f_X(X,Y)}{P_X} = \frac{f_Y(X,Y)}{P_Y}$$

$$MU_X/P_X = MU_Y/P_Y \quad (4.5)$$

Persamaan terakhir di atas merupakan kondisi bagi konsumen untuk memaksimumkan utility mereka. Selanjutnya berdasarkan kondisi kemaksimuman ini bisa diturunkan model mengenai permintaan.

Kurva permintaan bisa dimodelkan dengan cara menurunkannya dari persamaan (4.5) di atas. Namun sebelum melakukan hal itu perlu ditemukan terlebih dahulu derivatif dari MU_X terhadap P_X yang secara intuisi bisa dijelaskan sebagai berikut ketika harga barang X, P_X, naik menjadi P'_X maka hal itu akan mengganggu keseimbangan pada persamaan (4.5) di atas. Hal ini disebabkan karena kondisi keseimbangan tersebut tidak bisa dipenuhi lagi karena:

$$MU_X/P'_X < MU_Y/P_Y$$

Guna mengembalikan pada posisi keseimbangan lagi maka MU_X harus naik sedemikian rupa, katakanlah menjadi MU'_X sehingga

$$MU'_X/P'_X = MU_Y/P_Y$$

di mana $MU'_X > MU_X$. Dengan demikian bisa dikatakan bahwa kenaikan harga dari P_X menjadi P'_X telah menyebabkan kenaikan MU dari MU_X menjadi MU'_X sehingga hal ini bisa dikatakan bahwa:

$$\frac{dMU_X}{dP_X} > 0$$

Selanjutnya dari sini derivatif di atas bisa digunakan untuk mencari *slope* dari fungsi permintaan sebagaimana berikut ini:

$$\frac{dQ_X}{dP_X} = \frac{dMU_X}{dP_X} \cdot \frac{dQ_X}{dMU_X} < 0$$

$\frac{dQ_X}{dMU_X}$, di sini diklaim sebagai negatif dikarenakan hal itu tunduk pada hukum penurunan utilitas marjinal (*law of diminishing marginal utility*).

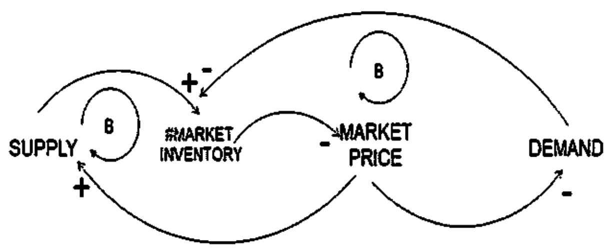
Sehingga *slope* dari fungsi permintaan bisa ditemukan sebagai: $\frac{dQ_X}{dP_X} < 0$.

Terlihat di atas bahwasanya *slope* dari fungsi permintaan adalah negatif yang berarti fungsi permintaan digambarkan sebagai meluncur dari kiri atas ke kanan bawah. Namun hal ini tidak menentukan ekspresi fungsinya secara spesifik. Grafik fungsi yang ada dalam Gambar 4.7. panel sebelah kiri hanyalah merupakan salah satu varian dari kurva permintaan. Dalam *analitic geometry* bisa didapati berbagai macam bentuk grafik fungsi dengan karakteristik yang dimaksud, yaitu *downward sloping*.

8. Pemodelan dengan Pendekatan System Dynamic

Sebagaimana dibahas pada buku I, pemodelan dengan pendekatan system dynamic di sini menjadi sangat penting ketika tujuan dari pemodelan diperuntukkan guna mengetahui pergerakan dinamik, dari waktu ke waktu, dari suatu variabel. Kelebihan dari pendekatan ini adalah ketika model ini digunakan untuk menggambarkan suatu sistem yang besar yang didalamnya terdapat hubungan kait mengait yang kompleks antar berbagai sub sistem dan sub-sub sistem yang ada.

Sebagai ilustrasi awal di sini disajikan bagaimana dinamik dari suatu pasar. Di sini secara umum komponen dari pasar terdiri dari sisi permintaan (*demand*) dan penawaran (*supply*). Hal ini digambarkan seperti berikut ini.

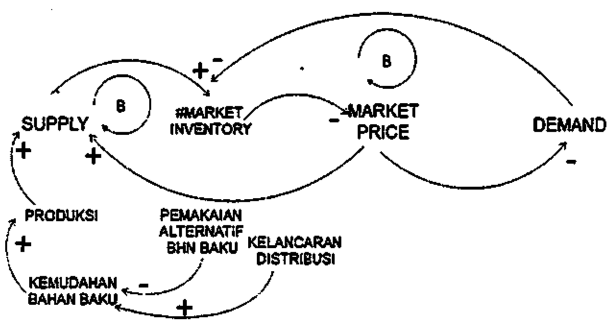


Gambar 4.31.

Pada Gambar 4.31. terlihat bahwa interaksi antara permintaan (*demand*) dan penawaran (*supply*) menghasil harga pasar (*marekt price*). Sementara tinggi rendahnya harga pasar ditentukan oleh keberadaan jumlah barang di pasar (*market inventory*). Tanda positif atau negatif di ujung tanda panah menunjukkan sifat hubungan: positif menunjukkan hubungan yang searah sementara negatif menunjukkan hubungan yang berbalikan.

Dinamik yang terjadi bisa dikonstruksikan sebagai berikut. Penawaran/permintaan tidak langsung mempengaruhi harga pasar. Bandingkan dengan model geometrik tentang penawaran dan permintaan sebagaimana yang biasa dipelajari pada kelas-kelas ekonomi mikro awal yang mana variabel jumlah stok barang dalam pasar tidak bisa dimunculkan. Padahal variabel tersebut mmerupakan variabel kunci yang sangat menjelaskan pergerakan harga pasar. Mengetahui dinamika jumlah stok barang dalam pasar akan sangat membantu untuk merumuskan suatu kebijakan untuk pengendalian harga pasar.

Untuk memperoleh gambaran yang lebih rinci dan guna mempersiapkan kebijakan yang lebih akurat mengenai pasar maka model di atas bisa dikembangkan lagi dengan memasukkan sub sistem sub sistem lain yang dianggap mempunyai peran penting seperti misalnya yang dipaparkan pada gambar berikut ini.



Gambar 4.32.

Untik memperoleh gambaran yang lebih baik maka orang bisa menambah model dengan memasukkan sub sistem lain yaitu rantai pasok bahan baku yang digambarkan pada Gambar 4.32..

Dari sini langkah selanjutnya adalah dengan mencari data untuk masing-masing variabel yang kemudian kalau sudah lengkap akan bisa dilakukan simulasi. Simulasi ke belakang (pada runtun waktu sebelumnya) akan menjadi patokan penilaian mengenai validitas dari model. Jika perilakunya sudah mendekati data-data pada runtun waktu ke belakang maka model tersebut bisa dikatakan baik yang seterusnya digunakan untuk melakukan simulasi ke depan yang merupakan pengujian terhadap suatu kebijakan/calon kebijakan.

V

VALIDASI MODEL

Dalam usaha untuk melakukan validasi model ini upaya difokuskan untuk melakukan pemeriksaan terhadapmodel beserta implikasinya. Tak sebatas itu, usaha lanjutanpun perlu dilakukan terutama adalah membongkar struktur asumsi-asumsi yang ada pada pemodelan terutama asumsi yang tersembunyi. Asumsi tersembunyi ini sangat pelik untuk diungkap kecuali dengan alat-alat matematika bahkan dengan pencermatan dan kecerdikan yang di atas rata-rata. Berikut ini dipaparkan berbagai validasi untuk model-model yang sudah disajikan di depan

1. Validasi Kurva Biaya Rata-rata (AC)

Bentuk kurva biaya rata-rata, AC, sebagaimana disajikan di depan mempunyai dua kemungkinan yaitu pada gambar 5.21. dan gambar 5.22.. Dari kedua bentuk tersebut manakah yang sesuai dengan intuisi ekonomi.

Untuk menjawab pertanyaan ini perlu melihat teori yang ada. Sebagaimana telah kita ketahui sebelumnya bahwa biaya muncul dari aktivitas berproduksi. Secara lebih spesifik dikatakan bahwa pemakaian input dan biaya merupakan sisi yang berbeda dari satu keping uang logam. Dengan kata lain, biaya merupakan konsekuensi dari pemakaian input dalam produksi. Dengan cara pandang yang seperti ini maka bisa dilihat bahwa terdapat unsur penting yang sangat mempengaruhi pemakaian input-input dalam berproduksi yaitu teknologi produksi.

Adapun teknologi berproduksi ini mempunyai Karakteristik yang berbda-beda antara satu perusahaan dengan perusahaan yang lain, antara satu sektor dengan sektoryang lain, antara jenis produk yang satu dengan produk yang lain. Perbedaan pemakaian jenis teknologi tertentu sepenuhnya sudah diperhitungkan oleh ahli yang ada dalam masing-masing perusahaan. Apapun teknologi yang dipilih tidak bisa dikatakan salah oleh pihak lain karena perusahaan mempunyai pertimbangan sendiri.. Dengan demikian tidak ada instrument yang bisa digunakan untuk melakukan penilaian atas pemakaian jenis teknologii tertentu kecuali penilaian yang di dasarkan pada pertimbangan-pertimbangan yang sifatnya umum. Perbedaan pemilihan teknologi inilah yang menyebabkan perbedaan dalam pemakaian input yang ada dan oleh karenanya penampakan biaya produksi rata-rata, AC, juga berbeda.

Memang secara umum pada sektor manufacturing teknologi berproduksi yang dipakai biasanya mempunyai karakteristik seperti efisiensi dengan anti klimaks. Karakteristik ini menunjukkan bahwa pada awal diaplikasikan teknologi tersebut sudah langsung menciptakan efisiensi sehingga biaya produksi rata-ratanya menurun, walaupun kemudian pada titik tertentu efisiensi tersebut berbalik.

Sebaliknya ada proses produksi yang mempunyai karakteristik lain di mana kandungan bahan baku material yang dipakai sangat sedikit dan sebagian besar input yang dipakai adalah *human capital* dari level tinggi (*knowledge-base technology*). Contoh industri yang termasuk dalam kategori ini adalah perusahaan software, aplikasi, system, dll. Pada perusahaan-perusahaan jenis ini suatu produk yang dihasilkan tidak menunjukkan wujudnya, melainkan dia harus dicari terlebih dahulu dengan usaha yang namanya innovasi. Dalam usaha innovasi ini biasanya berlangsung cukup lama dan bertahap. Prosess produksinyapun bertahap. Penyelesaian setiap tahap yang dilalui bisa dipandang sebagai menghasilkan output pada tahap yang bersangkutan. Semakin jauh tahap yang dicapai maka semakin rumit rangkaian kerja yang dilalui dan semakin banyak tenaga dengan keahlian tinggi yang terlibat. Oleh karenanya biaya yang dikeluarkanpun semakin tinggi. Ketika unit sudah ditemukan maka kegiatan yang rumit-rumit seperti sebelumnya pun sudah tidak ada lagi. Kegiatan yang ada pada tahap ini hanyalah persiapan launching produk yang berarti biaya yang dikeluarkanpun berganti arah meluncur turun. Selanjutnya pada tahap penjualan produk, biaya produksi hanya menyangkut mengkopi unit, packing dan pengiriman sehingga biaya menjadi turun dan turun lagi.

Dengan pemaparan proses produksi yang semacam ini maka bisa diketahui bahwa biaya produksi rata-rata per unit produk dalam grafik terlihat berbentuk tengkurap seperti digambarkan oleh gambar 5.22. di atas.

Dengan demikian bisa disimpulkan bahwa perbedaan representasi antara grafik yang ada pada gambar 5.21. dan gambar 5.22. semuanya dimungkinkan terjadi dan *valid*. Hanya saja yang perlu diperhatikan adalah masalah pengatribusian dari model yang dibangun yang tidak boleh salah. Misalnya model yang digambarkan oleh grafik dalam gambar 5.21. tidak bisa ditujukan untuk representasi produksi yang berbasis pada ilmu pengetahuan (*knowledge–base*), atau sebaliknya.

2. Validasi Model AVC yang Konstan

Biaya variabel rata-rata, AVC, disajikan di depan, gambar 5.24., menunjukkan bentuk kurvatur. Grafik dari AVC yang seperti pada gambar 5.24. di atas merupakan "sisa" dari biaya rata-rata, AC, dan biaya tetap rata-rata, AFC. Jika grafik biaya rata-rata sudah tervalidasi maka demikian juga untuk grafik biaya variabel rata-rata, AVC, juga sudah ikut tervalidasi.

Sekarang ini akan diberikan suatu diskusi tentang suatu model yang menunjukkan bentuknya sendiri yang berbeda dengan yang disajikan di depan. Untuk memulai ambil lagi definisi mengenai biaya total, AC, sebagaimana yang sudah disajikan di depan.

$$TC = TFC + TVC$$

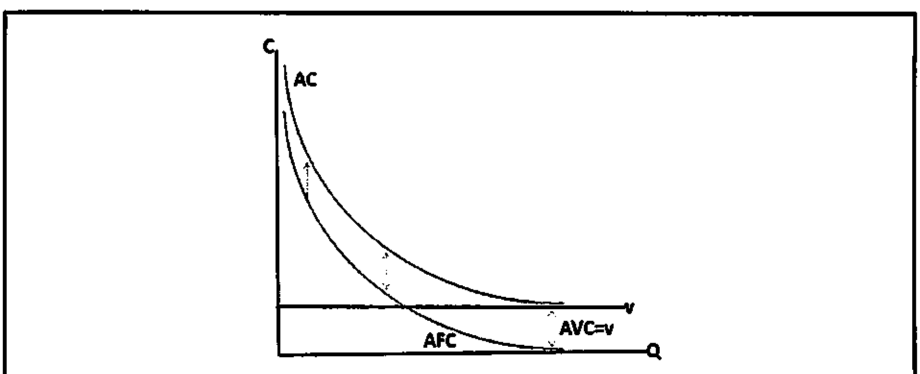
Di sini model ini mengatakan bahwa biaya variabel total, TVC, terbentuk melalui biaya variabel rata-rata dikalikan dengan kuantitas, Q, sehingga terlihat seperti di bawah ini

$$TC = TFC + vQ$$

di mana v adalah biaya variabel rata-rata yang dikeluarkan untuk setiap unit output. Definisi di atas bisa ditulis dalam bentuk rata-ratanya menjadi:

$$ATC = AFC + v$$

Definisi tersebut jika digambarkan akan terlihat seperti berikut ini.



Gambar 5.1.

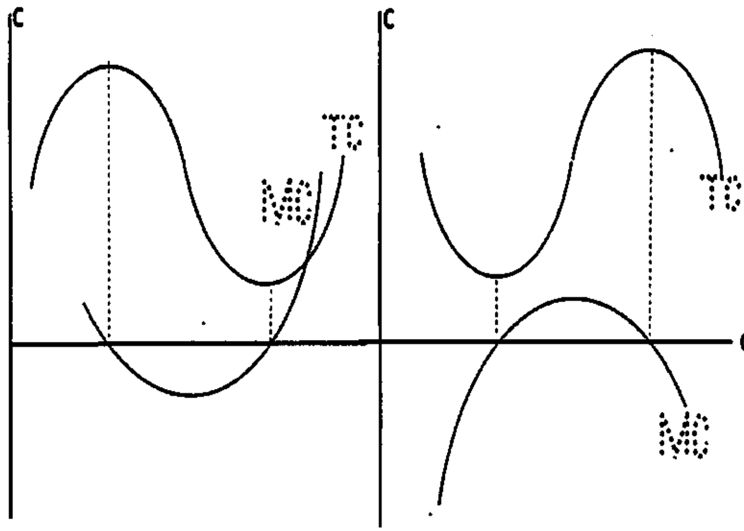
Representasi biaya variabel rata-rata, AVC, yang ada pada grafik pada Gambar 5.1. di atas sangatlah berbeda dengan yang ada pada grafik dalam gambar 5.24. Pada Gambar 5.1. di atas bisa dikatakan bahwa tidak terjadi adanya perubahan efisiensi, yang berarti bahwa teknologi berproduksi tidak bisa menghasilkan perbaikan. Penurunan pada biaya rata-rata disebabkan karena penghematan pemakaian biaya tetap yang dibebankan ke biaya produksi. Dengan demikian bisa dikatan bahwa karakteristik teknologi berproduksi yang dipakai bisa digambarakan sebagai teknologi yang usang. Pertanyaannya apakah setiap kegiatan produksi, atau beberapa diantaranya, bisa direpresentasikan dengan karakteristik teknologi yang seperti itu? Jawabannya mungkin diantara perusahaan yang ada, mereka menggunakan teknologi berproduksi dengan karakteristik yang seperti itu. Namun diyakini bahwa secara umum hal yang seperti itu susah untuk ditemui dalam kenyataannya.

3. Validasi Model Biaya Total (TC)

Di antara para grafik fungsi biaya, biaya total ini yang mempunyai paling banyak kontroversi di antara mereka. Issue ini muncul disebabkan adanya variant dari bentuk fungsi. Dalam penggambaran grafik fungsi biaya terdapat beberapa pilihan bentuk, yaitu

- Apakah grafik fungsi mempunyai akar riel atau tidak. Hal ini akan menentukan apakah grafik fungsi biaya mempunyai titik potong dengan sumbu datar
- Apakah grafik fungsi mempunyai titik ekstremum atau tidak. Kalau mempunyai titik ekstremum berarti grafik fungsi mempunyai mempunyai titik balik. Jika tidak mempunyai titik ekstremum grafik fungsi tidak mempunyai titik balik namun mempunyai titik belok
- Apakah bentuk dari grafik fungsi menyerupai huruf "S" atau huruf "S" dengan posisi terbalik

Pada bagian di bawah ini akan disajikan diskusi mengenai hal ini dengan tujuan untuk melakukan validasi model manakah yang dibenarkan menurut intuisi ekonomi. Pada grafik berikut ini menyajikan semua issue yang menjadi perhatian.



Gambar 5.2

Grafik di atas dihadirkan kembali yang berasal dari grafik yang ada pada gambar 5.26.. Pada grafik di atas disertakan juga grafik dari fungsi biaya marjinal, MC. Jika bentuk dari grafik biaya rata-rata dibenarkan menurut intuisi ekonomi maka grafik fungsi biaya marjinalnya tentu memenuhi tuntutan kesesuaian dengan intuisi ekonomi.

Sekarang mari kita uji apakah grafik fungsi biaya marjinal, MC, sudah memenuhi hal ini apa tidak. Satu hal yang tidak bisa di tawar adalah bahwasanya biaya marjinal tidak pernah dan tidak akan pernah menjadi negatif. Sekarang kita lihat bahwasanya grafik fungsi biaya marjinal baik yang ada pada panel sebelah kanan maupun sebelah kiri keduanya mempunyai segmen yang berada pada kuadrant kedua yang berarti segmen-segemen tersebut adalah negatif.

Hal yang kedua yang penting untuk memperoleh perhatian adalah perilaku dari grafik fungsi biaya total, TC, itu sendiri. Dalam ilmu ekonomi tentang biaya tidak dikenal adanya biaya total, TC, yang menurun. Padahal pada Gambar 5.2. di atas grafik fungsi biaya total, TC, mempunyai segmen yang menurun. Hal ini tentu bertolak belakang dengan intuisi ekonomi.

Hal yang ketiga adalah perlu adanya karakteristik yang cocok dengan kurva AC, yaitu diantaranya turunan pertama dari fungsi TC (dTC/dQ), MC, tidak mempunyai akar riel sehingga dia tidak mempunyai nilai ekstremum. Hal ini berimplikasi pada bentuk grafiknya yaitu tidak terdapat titik balik, melainkan hanya ada satu titik belok. Jika kita lihat pada grafik pada Gambar 5.2. di sana terlihat bahwasanya grafik fungsi yang diklaim sebagai grafik fungsi biaya rata-rata ternyata mempunyai titik belok, bahkan dua buah. Hal ini tentunya bertentangan dengan karakteristik yang sudah ditentukan di depan.

4. Validasi terhadap Ketersesuaian Fungsi Produksi Cobb-Douglas

Fungsi produksi Cobb-Douglas telah menjadi suatu model yang sangat populer dalam riset ekonomi yang berusaha untuk mengeksplorasi pengetahuan mengenai produksi, terutama di kalangan peneliti pemula atau di kalangan mahasiswa level *undergraduate.* Namun tanpa disadari bahwa sebenarnya fungsi produksi Cobb-Douglas ini mempunyai kelemahan yang susah untuk dilakukan remedi terhadapnya. Kelemahan ini menyangkut karakteristik yang tidak sesuai dengan intuisi dalam ekonomi. Berikut ini diberikan pembuktian mengenai kelemahan-kelemahan yang ada padanya.

Untuk melakukan pembuktian ini perlu kiranya pada tahap awal ini ditampilkan ekspresi fungsi produksi Cobb-Douglas tersebut, sebagaimana berikut ini:

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta}$$

1). Unit elasticity of substitution among inputs.

Pada seksi berikut ini akan disajikan bagaimana proses menemukan elastisitas substitusi antar input. Di sini elastisitas substitusi antar input didefinisikan sebagai:

$$\varepsilon_{LK} = \frac{\%\Delta \text{ in } \left(K/L\right)}{\%\Delta \text{ in MRTS}_{LK}}$$

$$MP_L = A\alpha\frac{Q}{L}, MP_L = A\alpha\frac{Q}{L}, MP_K = A\beta\frac{Q}{K}$$

$$MRTS_{LK} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}$$

$$\varepsilon_{LK} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{d\left(\dfrac{\alpha}{\beta}(K/L)\right)}{\dfrac{\alpha}{\beta}(K/L)}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}d\,((K/L))}{\dfrac{\alpha}{\beta}(K/L)}} = \frac{\dfrac{d(K/L)}{K/L}}{\dfrac{d\,((K/L))}{(K/L)}} = 1$$

Terlihat dari hasil di atas bahwa elastisitas substitusi antar input adalah konstan yaitu sebesar satu atau *unity* pada sepanjang kurva *isoquant*. Hal ini menunjukkan bahwa proses penggantian antar input, modal untuk tenaga kerja atau sebaliknya, relatif tidak mudah pada seluruh domain produksi.

2). Permasalahan Keterpisahan (*seperability*)

Permasalahan keterpisahan (*seperability*) ini menjadi perhatian dari banyak ahli ekonomi. Para ahli ekonomi menganggap bahwa keterpisahan (*seperability*) ini hanya terjadi pada proses produksi dengan cara-cara dan teknologi yang sangat sederhana. Untuk suatu proses produksi yang sedikit agak maju, maka tidak akan dijumpai permasalahan keterpisahan (seperability) dalam arti perubahan pemakaian salah satu input akan mendorong perubahan terhadap pemakaian input lainnya baik secara positif maupun negatif.

Permasalahan keterpisahan (*seperablity*) bisa ditunjukkan melalui bagaimana perubahan pemakaian salah satu input berdampak pada pemakaian input lainnya. Untuk mengetahui hal ini cukup dilakukan differensiasi fungsi produksi Cobb-Douglas terhadap salah satu faktor produksi, sebagai berikut ini:

$$\frac{dQ}{dL} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} \qquad \frac{dQ}{dK} = A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

$$= \frac{\alpha A L^{\alpha}K^{\beta}}{L} \qquad = \frac{\beta A L^{\alpha}K^{\beta}}{K}$$

$$= \alpha\frac{Q}{L} \qquad = \beta\frac{Q}{K}$$

Terlihat dari hasil di atas bahwasanya differensiasi fungsi produksi terhadap salah satu input bersifat netral terhadap input lain. Differensiasi Q terhadap L menelurkan hasil yang tidak mengait pada K ($\alpha Q/L$), begitu juga differensiasi Q terhadap K menelurkan hasil yang tidak mengait pada L ($\beta Q/K$). Artinya perubahan pemakaian salah satu input tidak akan mempengaruh pemakaian input yang lain, berapapun input tersebut akan ditambah. Jika terhadap hal ini dilakukan penafsiran yang agak jauh maka bisa dikatakan bahwa hal ini menunjukkan bahwa substitusi antar input sangatlah mudah.

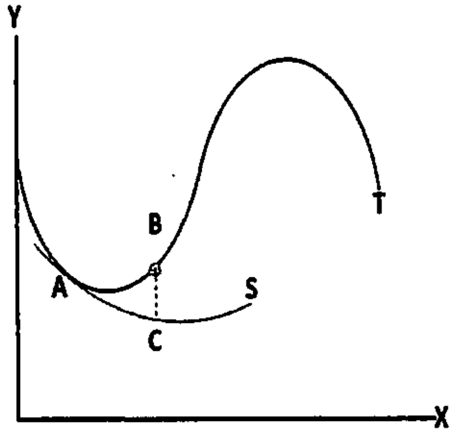
Dari kedua hal yang dipaparkan di atas menunjukkan bahwa terdapat adanya kontradiksi satu sama lain. Pada pemaparan mengenai elastisitas substitusi diperoleh penggantian antara input satu dengan input yang lain relatif tidak mudah. Sementara pada pemaparan mengenai permasalahan keterpisahan (*seperability*) diperoleh hasil bahwa substitusi antara input yang satu dengan input lainnya sangatlah mudah.

Selain itu dalam hal keterpisahan, dikatakan bahwa hal itu hanya bisa terjadi pada kegiatan produksi yang sifatnya sangat sederhana. Sementara secara umum saat ini banyak ditemui bahwa kegiatan produksi yang mempunyai karakteristik seperti itu susah ditemukan.

Berdasarkan pada pemaparan di atas kemudian di sini bisa disimpulkan bahwa fungsi produksi Cobb-Douglas tidak bisa memenuhi tuntutan kesesuaian dengan keadaan produksi yang senyatanya.

5. Permasalahan Kecembungan (*Convexity Issue*)

Kecembungan (convexity) merupakan permasalahan yang kritis dalam area optimisasi. Sudah menjadi kelumrahan bahwa dalam optimisasi biasa dikenal dengan adanya aturan titik singgung. Misalnya posisi utility yang maksimum dicapai ketika kuva indifferent menyinggung garis anggaran (budget). Output yang maksimum dicapai ketika kurva *isoquant* menyinggung garis *isocost*. Namun demikian tidak banyak orang yang tahu bahwa aturan titik singgung tersebut mempunyai prasyarat bahwasanya semua grafik yang terlibat di sana adalah cembung (*convex*) atau paling tidak *quasi concave* (kuasi cekung). Sebagai gambaran berikut ini akan disajikan dua grafik fungsi yang bersinggungan satu sama lain namun titik singgung yang terjadi antara keduanya tidak dijamin bahwa titik tersebut adalah titik optimum.



Gambar 5.3.

Untuk memulai pembahsan ini pandanglah Gambar 5.3. di atas. Di sana terdapat dua buah kurva yaitu kurva S dan kurva T. Anggap di sini bahwa kurva S berperan sebagai grafik yang menunjukkan benefit yang ingin diperoleh, sehingga kurva tersebut diposisikan sebagai grafik tujuan (*goal*). Sedangkan kurva T merupakan kurva yang menunjukkan jumlah sumberdaya yang dipunyai perusahaan yang akan digunakan untuk memperoleh benefit tersebut sehingga dalam kasus ini dia berperan sebagai grafik batasan (*constraint*). Lihat juga bahwa grafik T di sini merupakan grafik yang mempunyai karakteristik cekung.

Selanjutnya jika grafik S menyinggung grafik T pada titik A hal ini tidak serta merta bisa dikatakan bahwa titik singgung tersebut adalah titik optimum. Untuk mengujinya ambilah satu titik lain: titik C dalam grafik tersebut. Titik C mempunyai tingkat benefit yang sama dengan titik A karena mereka sama-sama berada pada kurva benefit yang sama: S. Sekarang akan kita periksa titik A dan titik C untuk mengetahui yang mana yang lebih bagus diantara keduanya.

Titik A memakan semua sumberdaya yang disediakan oleh perusahaan karena dia terletak tepat pada kurva batasan T. Di lain pihak titik C bisa memproduksi dengan menghasilkan tingkat benefit yang sama, dibanding dengan titik A, namun dengan memakan sumber daya yang lebih sedikit dari titik A. Hal ini bisa demikian dikarenakan titik C berada di bawah (di dalam) kurva T yang berarti bahwa titik C bisa menghasilkan tingkat benefit yang sama namun masih terdapat penghematan pemakaian sumberdaya. Dengan demikian bisa disimpulkan bawa titik C lebih bagus daripada titik singgung A. Dengan kata lain dalam kasus ini titik singgung bukan merupakan titik terbaik.

6. Validasi terhadap Model St Petersburg *Game*

St Peterburg game telah menjadi topik bahasan yang fenomenal terutama dalam area ekonomi resiko (*economics of risk*). Dia juga telah dijadikan sebagai model yang sangat menjelaskan mengenai dasar-dasar penilaian sejumlah kekayaan yang di dalamnya terkandung adanya resiko.

Permainan (*game*) tersebut dibangun di atas suatu aturan yang mengiringi suatu permainan lempar koin. Dalam permainan ini seseorang akan
emilih sisi mata uang (koin) yang akan di lempar sebagai taruhan dia,
anlah di sini dia bertaruh pada muka "head" atau kepala. Selanjutnya
an dilempar ke atas. Jika muka "head" muncul pada lemparan ke
lia akan memperoleh uang sebesar 2^i. Sementara secara teoretik
" bisa mencapai ∞. Sehingga nilai harapan dari permainan
ekspresikan sebagai berikut:

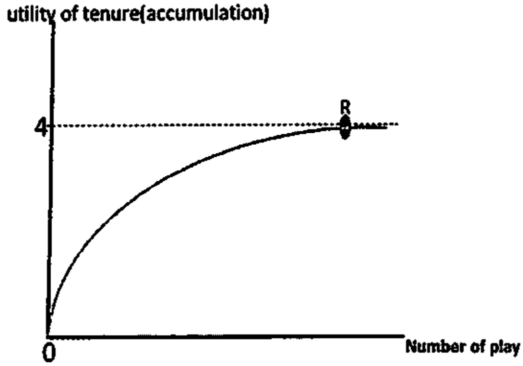
$$W = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = \infty \quad (6.1.)$$

nukan di atas sungguh fantastis yaitu sebesar
a permainan tersebut tidak menjadi favorit
et untuk masuk bermain (*ticket to play*)
i yang sangat tidak sepadan dengan
pun, harga tiket tersebut mewakili
ang dijual lebih tinggi dari harga
n tidak akan ada *gamer* yang

ukkan oleh persamaan
enyataan mengingat
t dengan harga di
yang seperti ini
dap keberlakuan

lesaikan *paradox* terse-
gai melakukan validasi atas
ng dilakukan di sini tidak hanya
in konsumen rela untuk membayar

seharga di atas $5 sebagai uang tiket untuk bermain. Namun hal ini dilakukan secara scientific. Adapun langkah yang ditempuh adalah dengan menggunakan pendekatan hukum penurunan utilitas marjinal (*law of diminishing marginal utility*), sehingga penampakan grafik utilitas dari kepemilikan nampak pada gambar berikut ini:



Gambar 5.4.

Untuk melakukan hal ini dia mengenakan logarithma pada nilai uang yang diterima sehingga jalur pergerakan nilai utilitas dar kepemilikan total bisa dilihat pada gambar berikut ini.

$$h \quad = \sum_{=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right) h\ 2$$

$$h \quad = \sum_{=1}^{\infty}\left(\frac{}{2}\right) h\ 2$$

$$h \quad = h\ 2\sum_{=1}^{\infty}\left(\frac{}{2}\right)$$

Lihat bahwa nilai probabilita $(1/2)^i$ tidak ikut di dike rithma karena yang dikenakan logarithma dalam kasus kepemilikan harta karena yang tunduj pada hukum pe tas adalah kepemilikan harta. Selanjutnya komputasi tabel berikut ini

1/2 +	1/4 +	1/8 +	1/16 +	1/32 +	1/64 +	......
	1/4 +	1/8 +	1/16 +	1/32 +	1/64 +	..

		1/8 +	1/16 +	1/32 +	1/64 +	....		¼ +
			1/16 +	1/32 +	1/64 +	....		1/8 +
				1/32 +	1/64 +	....		1/16 +
					1/64 +	....		1/32 +
								1/64
							0	. . . .
								Σ = 2

Dengan demikian maka nilai dari ln W dan W adalah:

$$\ln W = 2\ln 2 = 1/3863$$

$$W = 3.99964001648$$

Terlihat bahwa hasil dari komputasi di atas menunjukkan bahwa nilai harapan yang tadinya mempunyai nilai tak terhingga (∞) kemudian setelah dilakukan pendekatan yang mengikuti hukum penurunan utilitas marjinal ternyata dia hanya mempunyai nilai sebesar $4. Makanya hal itu tidak mengherankan jika tiket untuk masuk bermain tidak akan laku jika dijual seharga $5.

7. Validasi terhadap Model Empiris

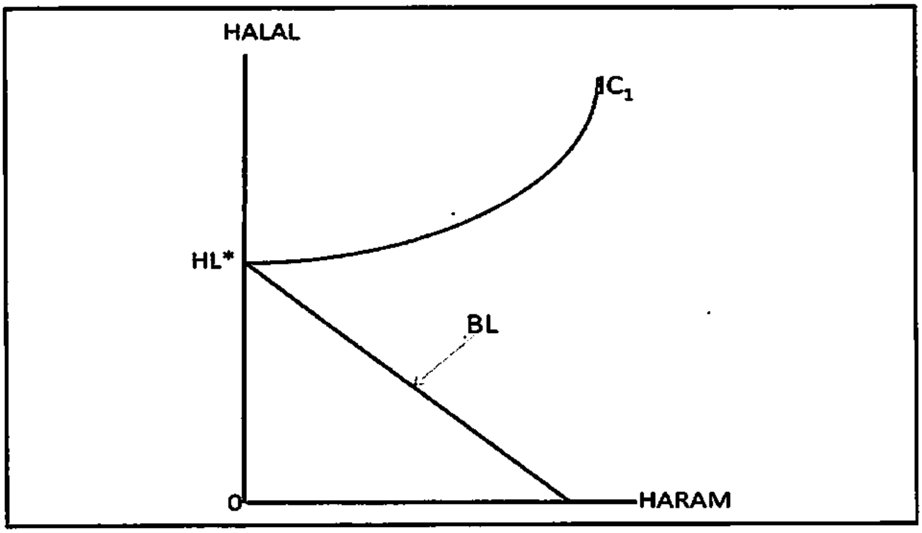
Selain model-model yang sifat teoretik, terdapat tidak sedikit model yang dibangun dengan tujuan untuk memperoleh bukti empiris mengenai suatu hipotesis. Biasanya hal ini dilakukan dengan model ekonometrik seperti:

$$\mathrm{Y} = \beta_0 + \beta_{\mathrm{i}} \sum X_i + \varepsilon_{\mathrm{i}}$$

Validasi terhadap model seperti di atas biasanya dilakukan dengan aturan kebiasaan (*rule of thumb*) yaitu dengan melihat nilai koefisien determinasinya, R^2. Jika nilai R^2 tersebut mampu mencapai nilai minimum 0.80 hal ini dianggap bahwa model yang bersangkutan sudah valid, Sebaliknya jikalau nilainya tidak mampu mencapai 0.80 maka model tersebut kepdanya perlu dilakukan perbaikan.

8. Validasi Model Preferensi Muslim

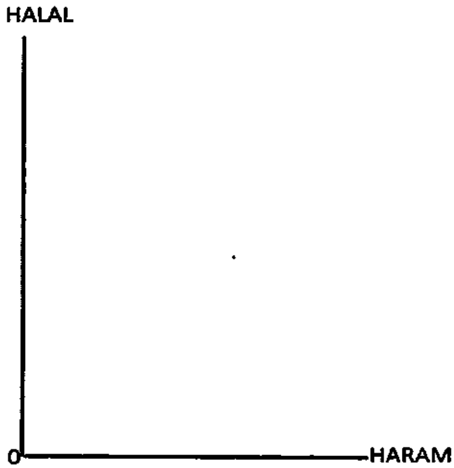
Ekonomi islam telah menjadi perhatian besar bagi para ekonom. Mereka banyak menyumbangkan pikirannya untuk berpartisipasi dalam membangun teori ekonomi yang berlandaskan Islam. Salah satunya adalah Adiwarman Karim yang memodelkan perilaku konsumen muslim dalam sebuah model yang digambarkan berikut ini.



Gambar 5.5.

Gambar 5.5. sebenarnya disertai dengan narasi yang ditujukan untuk memberi penjelasan. Namun dalam kesempatan ini pembahasan difokuskan dalam rangka pemodelan sehingga tidak diperlukan untuk menampilkan narasi, karena dalam pemodelan (*modelling*) baik yang bersifat grafik maupun ekspresi matematik mereka mampu untuk menjelaskan dirinya sendiri. Mereka tidak membutuhkan bantuan pihak lain untuk menjelaskan dirinya.

Dalam gambar di atas satu set grafik yang ada secara bersama-sama menjelaskan adanya upaya untuk memaksimumkan utility seorang muslim. Di sini solusi yang terjadi adalah solusi dari type cournot di mana barang yang dikonsumsi seluruhnya adalah barang halal dan tidak tercampur atau dikombinasikan dengan barang haram. Namun demikian tetap saja perlu dilakukan validasi sejak dari awal proses. Untuk itu ikutilah tahapan-tahapan berikut ini.



Gambar 5.6.

Gambar 5.6. di atas hanya merupakan sistem sumbu Cartesian dan tidak ditemukan adanya grafik apapun di sana. Namun di dunia modelling orang sudah sangat paham bahwa grafik, apapun nantinya yang tergambar di dalamnya, menunjukkan adanya hubungan antara dua jenis barang yaitu barang halal dan barang haram. Jika demikian maka perlu dilihat satu persatu hubungan yang terjadi dan pemaknannya sebagai berikut ini.

- **Hubungan Negatif**

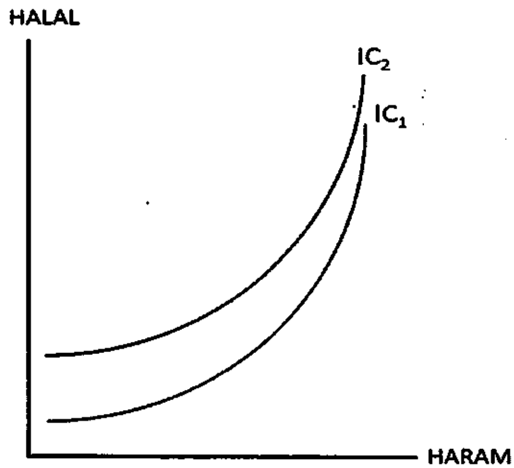
  Jika isi grafik yang ada dalam Gambar 5.6. merupakan grafik yang menunjukkan hubungan negatif maka hal itu menggambarkan bahwa kedua barang yang ada, barang halal dan barang haram, berkait satu sama lain secara berbalikan yaitu jika konsumsi barang halal turun maka konsumsi barang haram harus naik. Sebaliknya jika konsumsi barang haram yang turun maka konsumsi barang halal harus naik. Hal ini menunjukkan bahwa barang halal dan barang haram bisa saling mengganti (*substitute*) satu sama lain.

- **Hubungan Positif**

  Jika isi grafik pada Gambar 5.6. adalah grafik yang menunjukkan hubungan positif antara keduanya maka hal itu menunjukkan bahwa kedua barang dikonsumsi secara bersama-sama. Jika jumlah barang halal yang dikonsumsi naik maka jumlah barang haram yang dikonsumsi pun ikut naik. Begitu juga sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa kedua barang mempunyai hubugan yang komplementer yang berarti satu dengan yang lainnya saling melengkapi.

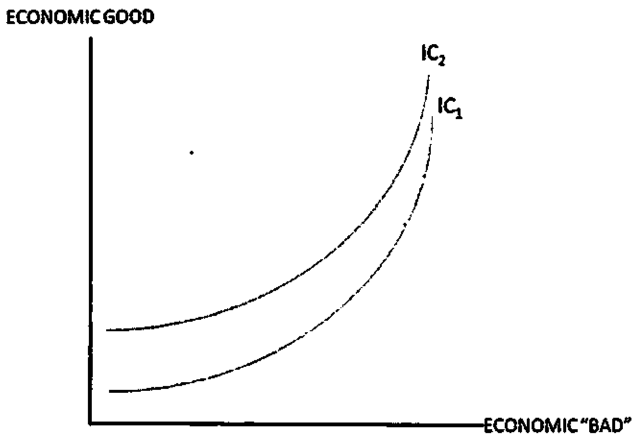
Sekarang perlu dilakukan validasi atas kondisi yang disampaikan di atas, apakah hal itu betul-betul menjadi sikap orang muslim dalam berkonsumsi atau dalammemilih barang untuk dikonsumsi. Rasanya para pembaca yang muslim sudah bisa menilai sendiri apakah hal itu sesuai dengan sikap mereka (orang muslim) dalam berkonsumsi

Selanjutnya tahap validasi berikutnya adalah menghadirkan preferensi muslim secara utuh sebagaimana disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 5.7.

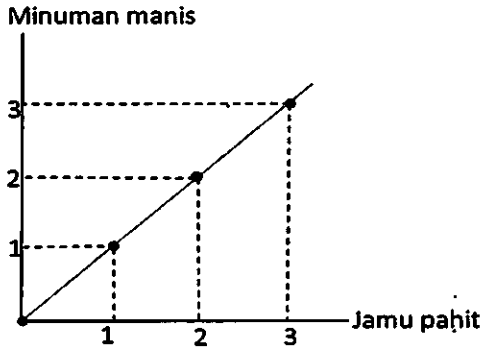
Pada Gambar 5.7. di atas disajikan suatu informasi mengenai adanya dua buah barang, halal dan haram, yang berhubungan secara positif. Sebagaimana dijelaskan pada bagian sebelumnya hal itu menunjukkan bahwa kedua barang saling melengkapi satu sama lain. Hal ini tentu saja tidak sesuai dengan intuisi seorang muslim. Sebagai pembanding di sini akan disajikan sebuah model yang menggambarkan hal yang sama dengan grafik yang ada dalam Gambar 5.7. di atas.



Gambar 5.8.

Grafik yang ada pada Gambar 5.8. di atas sumbu tegaknya adalah economic good dan sumbu datarnya adalah economic "bad". Secara umum economic "bad" didefinisikan sebagai segala sesuatu yang tidak disukai oleh sementara orang karena mengkonsumsi barang tersebut akan menyebabkan turunnya tingkat utilitas yang dipunyai sebelumnya. Namun, walaupun hal itu dikatakan sebagai "bad" tetapi hal itu tidak benar-benar berarti bahwa barang tersebut adalah barang yang buruk. Sebagai contoh adalah operasi atau pembedahan (*surgery*) atau suntikan. Bagi banyak orang hal itu dianggap sebagai sesuatu yang menakutkan, beresiko, menimbulkan ketidak nyamanan dsb, sehingga mereka berusaha untuk sebisa mungkin menghindari hal ini. Karena bagi kelompok orang tersebut hal itu bisa menurunkan tingkat utilitas mereka. Walaupun demikian, barang tersebut tidak benar-benar dianggap sebagai barang yang mempunyai sifat buruk. Barang itu jelas bermanfaat bagi kehidupan manusia yang berarti bahwa dia adalah baik dan diperlukan.

Sebagai ilustrasi yang lain mengenai economic "bad" ini adalah jamu herbal yang rasanya sangat pahit dan baunyapun kurang sedap. Bagi banyak orang hal itu merupakan barang yang perlu dihindari, sama persis seperti pada kasus pembedahan dan suntikan di atas. Namun atas rekayasa penjualnya, orang-orang tetap bisa mengkonsumsinya tanpa merasakan ketidak nyamanan. Hal itu dilakukan dengan memberikan penawar rasa pahit setelah meminum jamu tersebut yaitu dengan memberikan minuman manis dan beraroma sedap. Tentu saja penawar yang diberikan ini diberikan dalam takaran tertentu, katakanlah satu cangkir kecil. Dengan demikian setiap konsumsi satu gelasjamu pahit akan diikuti dengan konsumsi minuman manis sebanyak satu cangkir. Begitu juga jika meminum jamu pahit dua gelas sesudahnya akan diberikan minuman manis sebanyak dua gelas juga. Hubungan antara konsumsi kedua barang bisa diekspresikan pada grafik berikut ini.

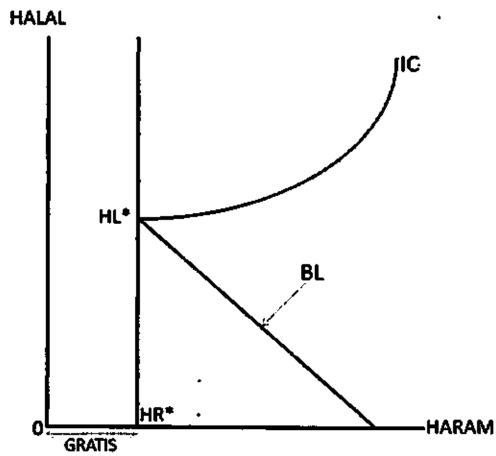


Gambar 5.9.

Grafik pada Gambar 5.9. di atas mempunyai sifat yang secara umum sama dengan grafik yang ada pada Gambar 5.7., yaitu mereka sama-sama mempunyai *slope* yang menaik (*up-ward sloping*). Namun demikian barang yang berupa jamu pahit tidak bisa dikatakan atau disamakan dengan barang haram. Keduanya mempunyai karakteristik yang berbeda. Sehingga memposisikan barang halal dan barang haram dalam satu hubungan yang komplementeri nampaknya tidak sesuai dengan intuisi setiap muslim.

Tahap validasi selanjutnya adalah validasi menyeluruh. Di sini akan disajikan bagaimana akhir dari pilihan konsumen muslim dilakukan. Kalau mengacu pada Gambar 5.5. memang hasilnya menunjukkan bahwa barang yang dikonsumsi seluruhnya adalah barang halal. Namun di bawah ini akan dihadirkan situasi yang berbeda.

Sekarang di sini akan digambarkan bagaimana usaha marketing dari narkoba, yang mana dia adalah barang haram berat. Para pengedar narkoba berusaha menarik konsumen baru. Hal ini dilakukan dengan "merekrut" anak-anak yang relatif masih di bawah umur atau masih berstatus sebagai "anak baru gede" (ABG). Para pengedar narkoba menarget mereka dengan cara memberi narkoba secara gratis untuk beberap waktu sampai terlihat kelompok target ini sudah mulai menunjukkan kecanduan. Ketika gejala kecanduan tersebut sudah muncul maka kepda mereka dikenakan beban membayar, atau tidak lagi gratis, atas narkoba yang diberikan. Dan selanjutnya proses berlangsung. Situasi seperti ini jika digambarkan akan terlihat seperti gambar berikut ini.



Gambar 5.10.

Gambar 5.10. di atas menunjukkan bahwa dikarenakan adanya pemberian gratis, maka hal itu tidak mempengaruhi posisi anggaran dari konsumen. Dengan kata lain jika mereka menerima untuk mengkonsumsi barang haram tersebut maka hal itu tidak berpengaruh pada anggaran mereka. Dalam hal ini barang gratis yang diterima tidak dimasukkan dalam perhitungan. Hal ini akan menjadikan mereka baru menaruh perhatian pada anggaran mereka hanya pada saat mereka dibebani pembayaran atas barang haram yang mereka terima. Hal ini menjadikan perhitungan atas konsumsi barang haram tersebut bermula dari titik di mana mereka mulai harus membayarnya. Ini ditunjukkan oleh pergeseran sumbu vertikal ke kanan hingga mencapai batas gratis. Oleh karenanya semua grafik berpangkal pada sumbu tersebut. Hasil akhir dari proses ini adalah jumlah barang yang dikonsumsi adalah sebesar HR* untuk barang haram dan HL* untuk barang halal. Badingkan hal ini dengan kondisi sebelumnya di mana solusi terdapat pada konsumsi barang halal sebesar HL* dan barang haram yang dikonsumsi adalah nol, sebagaimana yang ditunjukkan pada Gambar 5.5. di atas. Di sini menunjukkan bahwa menurut model tersebut konsumen moslem bisa mengkonsumsi barang haram, sesuatu yang tidak sesuai dengan norma Islam atau hal itu tidak bisa diklaim sebagai perilaku konsumen muslim.

9. Validasi Model Ketidak-berlakuan Konsep Nilai Waktu dari Uang

Berikut ini disajikan sebuah contoh pemodelan yang tidak sahih (*valid*). Model ini dipresentasikan oleh salah satu mahasiswa saya di salah satu kelas yang saya ajar. Model yang dipresentasikan dalam kelas tersebut suatu model tentang ekonomi Islam tepatnya adalah mengenai konsep nilai waktu dari uang. Mekanisme yang disusun di sini mempunyai tujuan untuk menunjukkan bahwa konsep nilai waktu dari uang tidak berlaku dalam Islam. Di sana dituliskan formula dari konsep nilai waktu dari uang sebagaimana diketahui secara umum yaitu:

$$FV = PV(1+r)^t. \qquad (6.2)$$

di mana FV, PV, r dan t secara berturut-turut adalah nilai masa depan (*future value*), nilai sekarang (present *value*), tingkat bunga (*interest rate*,r) dan waktu (*time*,t).

Dalam usaha menunjukkan bahwa konsep nilai waktu dari uang tersebut tidak berlaku dalam Islam, sebuah argumen ditambahkan kepada persamaan di atas yaitu bahwasanya manusia tidak mempunyai hak kepemilikan atas waktu. Kepemilikan atas waktu hanyalah terdapat pada Allah. Artinya kepemilikan manusia atas waktu adalah 0 (nol).

Sebagai konsekuensinya maka nilai t adalah nol. Dengan nilai t ditetapkan sama dengan nol maka diperoleh nilai FV akan sama dengan PV yang berarti konsep nilai waktu dari uang menjadi tidak berlaku.

Selanjutnya di sini akan diberikan penilaian sekaligus validasi atas hal tersebut. Untuk memulainya, terlebih dahulu persamaan nilai waktu dari uang yang disajikan di atas perlu diubah dalam bentuk waktu kontinyu agar bisa terlihat dengan jelas substansi permasalahannya.

Ekspresi di atas diubah menjadi waktu yang kontinyu: n, di mana $n \rightarrow \infty$. Dengan demikian nilai r (*interest rate*) juga berubah menjadi r/n dan periode waktu yang terjadi juga menyesuaikan menjadi n x t yang terlihat sebagai berikut:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (6.3)$$

Selanjutnya ekpresi di atas bisa ditulis kembali menjadi:

$$FV = PV\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}rt} \quad (6.4.)$$

Perlu dicermati bahwa pangkat dari terma yang ada dalam kurung pada persamaan (5.4.) di atas tidak mengalami perubahan nilai walaupun dituliskan dalam bentuk yang berbeda yaitu tetap "nt". Begitu juga terma kedua yang ada di dalam kurung juga tetap tidak berubah walaupun dia diekspresikan dalam bentuk yang berbeda. Nilainya tetap "r/n", sehingga persamaan (5.4.) sama persis dengan persamaan (5.3.)

Perlu diketahui bahwa bilangan Euler, e, didefinisikan sebagai,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad (6.5.)$$

Mengingat bahwa nilai waktu n mendekati tak terhingga maka berdasar pada definisi tentang bilangan euler di atas, persamaan (5.4.) bisa dituliskan dengan mengambil limitnya menjadi berikut ini:

$$FV = PV\, e^{rt} \quad (5.5.)$$

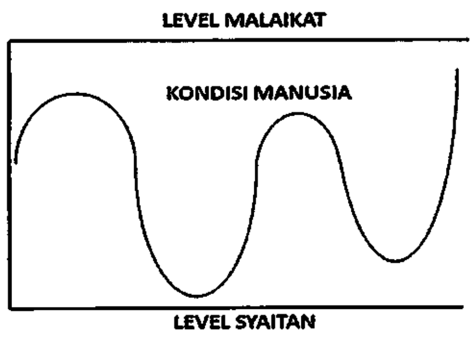
Ekspresi pada persamaan (5.5.) di atas menunjukkan bahwa dia merupakan persamaan differensial dari waktu (t) (*differential equation of time*). Hal ini berarti bahwa waktu di sini terus berjalan dari t = 0 dan terus maju ke depan. Hal ini sebagai konsekuensi bahwa karakteristik dasar dari waktu adalah bergerak maju. Sebagai konsekuensi dari bentuk persamaan diferensial ini adalah bahwasanya nilai waktu dari 0, 1, 2, 3, dan seterusnya adalah merupakan indeks waktu. Jika suatu obyek berada pada waktu t = 2 bukan berarti obyek tersebut memiliki waktu sebanyak 2 (dua) melainkan obyek tersebut terindeks berdasar waktu pada t = 2 yang artinya dia berada pada waktu t setelah t =1 dan sebelum t yang terindeks sebagai 3 (t = 3).

Dengan pemaparan perbedaan konsep kepemilikan waktu dan indeks waktu di atas maka hal ini bisa digunakan untuk menilai model yang sedang diuji di sini (model yang dipresentasikan oleh mahasiswa saya). Waktu di sini dianggap sebagai suatu kepemilikan, yang mana hanya Allah lah yang memilikinya sehingga kepemilikan atas waktu oleh manusia di sini adalah 0 (nol). Padahal pada ekspresi persamaan (5.5.) di atas nyata-nyata bahwa t di sana berarti hanyalah indeks waktu. Jadi mensubstitusikan angka 0 (nol) untuk waktu t yang dikonsepkan sebagai kepemilikan untuk menggantikan waktu t yang sifatnya indeks tidaklah tepat.

Dengan memperhatikan semua pemaparan di atas maka di sini bisa disimpulkan bahwa model yang divalidasi di sini adalah tidak valid.

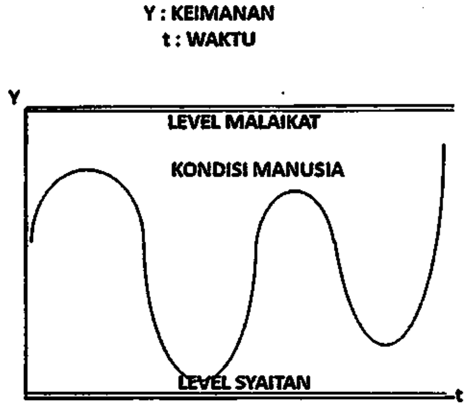
10. Validasi Model Ketidak-stabilan Iman Manusia

Ketika saya masih kuliah pada strata 1 (satu) dulu, dosen mata kuliah Agama Islam mencoba menggambarkan Iman manusia. Iman manusia digambarkan berada pada level di antara level malaikat dan syaitan. Malaikat digambarkan sebagai mempunyai iman yang stabil pada level yang tertinggi dan syaitan berada pada posisi sebaliknya yaitu mempunyai iman yang stabil pada level paling rendah. Hal ini oleh dosen tersebut digambarkan sebagai berikut.



Gambar 5.11.

Dalam kacamata geometry analitic, gambar di atas tidak mebawakan informasi apapun dikarenakan tidak memenuhi standar penggambara/penulisan secara geometri. Aturan baku dalam geometri adalah perlunya memberikan nama-nama pada sumbu yang ada agar grafik tersebut bisa ditafsirkan. Dengan berpegang pada aturan tersebut maka gambar di atas bisa digambarkan ulang sebagai berikut.

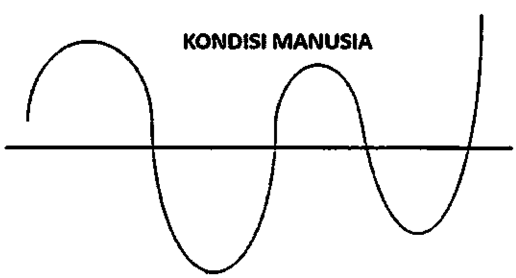


Gambar 5.12.

Dengan gambar yang telah diperbaiki yaitu Gambar 5.12. terlihat bahwa sumbu-sumbu telah didefinisikan secara baik yaitu sumbu vertial, Y, didefinisikan sebagai keimanan dan sumbu horisonthal, t, didefinisikan sebagai waktu. Untuk gambar-gambar selanjutnya definisi sumbu-sumbu yang ada mengikuti definisi tersebut.

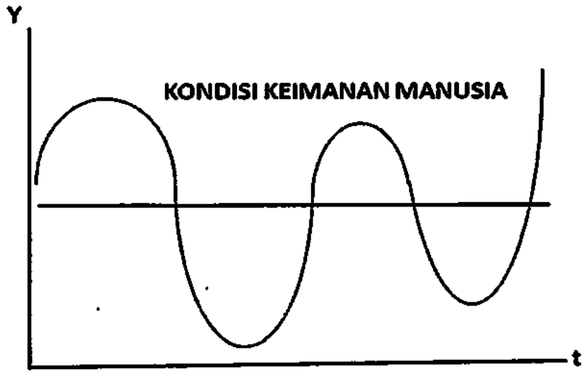
Dengan telah terdefinisikannya sumbu-sumbu yang ada, informasi tentang keimanan menjadi jelas yakni bahwasanya pada sepenjang waktu yang ada keimanan malaikat adalah stabil pada level tertinggi, sedangkan untuk kasus Syaitan keimanan mereka juga stabil pada level yang sangat rendah. Adapun manusia tingkat keimanannya bervariasi, kadang naik mendekati level malaikat kadang juga merosot mendekati level syaitan.

Pada perkembangan lain ada juga seorang mahasiswa yang menggambarkannya sebagai berikut



Gambar 5.13.

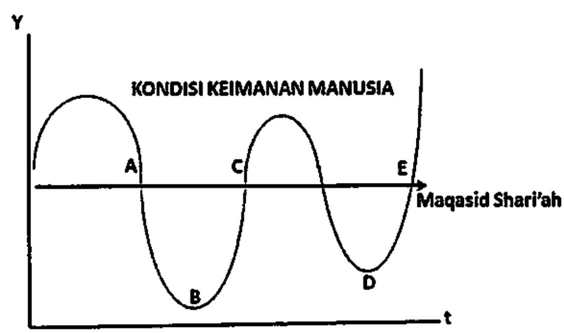
Grafik yang disajikan pada Gambar 5.13. performanya lebih buruk dari grafik yang ada pada Gambar 5.11.. Ini dikarenakan grafik yang ada dalam Gambar 5.13. sama sekali tidak ditunjukkan sumbu-sumbu yang menjelaskannya sehingga tidak bisa diraba/diduga apa makna dari grafik tersebut. Jika harus dimaknai bahwa hal itu membawa informasi yang sama dengan grafik yang ada dalam Gambar 5.12. (minus pembandingan dengan malaikat dan syaitan) maka gambar tersebut perlu dilengkapi sebagai berikut.



Gambar 5.14.

Dengan penambahan dan sekaligus penamaan sumbu-sumbu maka grafik yang ada pada Gambar 5.13. menjadi informatif yang semua orang bisa membacanya.

Di sini akan disajikan versi lain yang dar mahasiswa yang lain yang menampilkan modelnya sebagaimana disajikan berikut ini.

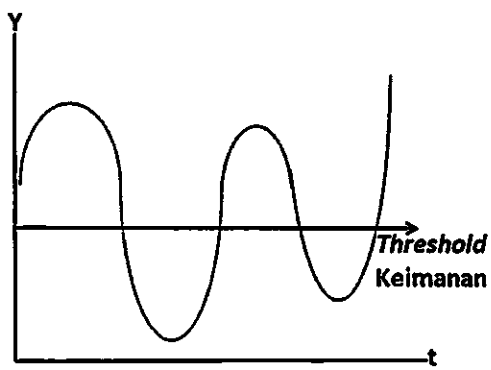


Gambar 5.15.

Nampak pada Gambar 5.15. penyusun model tersebut mengintroduksi dua hal baru yaitu Maqasid Shari'ah dan tanda panah ke arah kanan. Hal ini tentu saja perlu divalidasi secara cermat. Penilaian terhadap model tersebut adalah, pertama, Maqasid Shari' ah adalah konsep yang sempurna dalam Islam. Diyakini hanya orang-orang dengan keimanan tinggi, para tabi'in dan para sahabat (selain Nabi SAW sendiri), saja yang bisa menjalankannya dengan sempurna. Namun kenyataannya fakta grafik menunjukkan bahwa Maqasid Shari'ah diposisikan pada level keimanan yang relatif rendah. Kedua, terdapat keadaan yang tidak sesuai norma yang ada ketika dilihat titik-titik A, C dan E yang mana mereka posisinya berada pada segmen yang lebih tinggi dari garis Maqasid Shari'ah. Hal ini jelas mengundang tanda tanya karena mengingat bahwa manusia yang digambarkan oleh model ini adalah manusia normal umumnya pada waktu sekarang ini. Bagaimana mungkin orang biasa pada masa ini bisa berperilaku lebih tinggi daripada yang dikonsepkan oleh maqasid shari'ah.

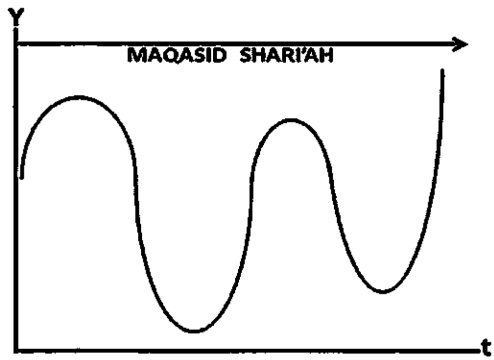
Selanjutnya diskusi di sajikan di bawah ini akan membahas masalah tanda panah ke kanan. Di sini sekali lagi ditekankan bahwa perspektif yang digunakan dalam pembahasan ini adalah dengan menggunakan perspektif geometri analitik. Dalam grafik yang ada pada Gambar 5.15. sumbu horisontal didefinisikan sebagai waktu (t). Sementara tanda panah menunjukkan arah dari suatu grafik. Karena tanda panahnya mengarah ke kanan yang mana menunjukkan ke arah indeks waktu yang lebih besar maka hal itu menunjukkan bahwa hal itu berjalan terus ke arah waktu ke depan.

Sebagai remedy atau perbaikan atas model tersebut di atas di bawah ini disampaikan dua model perbaikan untuk bisa dipilih, keduanya sesuai dengan intuisi dan norma yang ada.



Gambar 5.16.

Pada Gambar 5.16. di atas atributasi kepada maqasid shari'ah dihilangkan dan diganti dengan garis yang menunjukkan level keimanan. Hal ini menunjukkan bahwa jika keimanan seseorang berada di atas garis tersebut maka dia termasuk orang yang beriman dan sebaliknya jika keimanannya berada di bawah garis tersebut maka dia termasuk orang yang tidak beriman.



Gambar 5.17.

Selanjutnya pada Gambar 5.17. di atas garis maqasid shari'ah diubah posisinya pada tempat yang tinggi. Hal ini memberikan implikasi bahwa hanya orang-orang dengan level keimanan yang tinggi yang bisa menjalanakan konsep tersebut. Hal ini memberi arti bahwa maqasid shari'ah benar-benar merupakan konsep yang sangat bagus. Sedangkan tanda panah kearah kanan yang terdapat pada Gambar 5.16. dan Gambar 5.17. di atas menunjukkan bahwa kriteria-kriteria tersebut berlaku beriringan dengan waktu dan mengindikasikan bahwa hal tersebut tidak akan berakhir dan berjalan secara konstan seperti itu. Artinya sampai kapanpun kriteria keimanan dan maqasid shari'ah akan tetap seperti itu. Hal ini tentu saja bersesuaian dengan norma dan konsep yang ada dalam ajaran Islam. Dengan demikian, pengenaan tanda panah pada model-model tersebut bisa diterima dan sudah benar adanya.

DAFTAR PUSTAKA

Acemoglu, Daron (2009). The Solow Growth Model,. *Introduction to Modern Economic Growth.* Princeton: Princeton University Press. pp. 26–76.

Barro, Robert J.; Sala-i-Martin, Xavier *(2004). "Growth Models with Exogenous Saving Rates". Economic Growth (Second ed.). New York: McGraw-Hill. pp. 37–51.*

Basu, D. (2009), Economic Models, Method Theory and Application, World Scientific, 5 Toh Tuck Link, Singapore

Barelli, Paulo; Pessôa, Samuel de Abreu (2003). "Inada conditions imply that production function must be asymptotically Cobb–Douglas" (PDF). Economics Letters. 81 (3): 361–363. doi:10.1016/S0165-1765(03)00218-0. hdl:10438/1012. Last accessed on 12-23-2022

Berndt, Ernst R.(1991), *The Practice of Econometrics, Classic and Contemporary.* Addison-Wesley, USA

Cameron, Collin A.& Trivedi Pravin K.(2005), *Microeconometrics, Method and Appilcations,* Cambridge, USA

Cheng Maolin, (2016). *A Generalized Constant Elasticity of Substitution Production Function Model and Its Application, "Journal of Systems Science and Information,* De Gruyter, vol. 4(3), pages 269-279.

Christensen, B.J. & Kiefer, NM., (2009). Economic Modelling and Inference, Princeton University Pres, NJ,U.S.A

Christensen, Laurits R., Jorgenson, Dale W. & Lau, Lawrence J., (1973), Transcendental Logarithmic Production Frontiers, *The Review of Economics and Statistics* Vol. 55, No. 1 , pp. 28-45

Cobb, Charles W. & Douglas Paul H. A Theory of Production, *The American Economic Review,* Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139-165 (27 pages) https://www.jstor.org/stable/1811556, Last accessed 01 – 03-2021

De La Fuente, A. (2000), Mathematical Method and Models for Economist, The Press Syndicate of the University of Cambridge, UK

Devlin, Keith, (2000). *The Language of Mathematics, Making the Invisible Visible*, W.H. Freemaan & Co, New York, NY.

Donald A. R. Georgem. (1988), *Mathematical Modelling for Economists*, Palgrave MacMillan, London.

Harrod, R. F. (1939). "An Essay in Dynamic Theory". *The Economic Journal*. 49 (193): 14–33. doi:10.2307/2225181. JSTOR 2225181. Last accessed on 03 – 07 -2023

Henderson, James M.., Quandt, Richard E., (1988). *Microeconomic Theory A Mathematical Approach*, McGraw-Hill. United States

Holcombe, R. (1989), *Economic Models and Methodology*, New York: Greenwood Press, ISBN 0-313-26679-

Jehle, Geoffrey Alexander, and Reny, Philip J. (2001). *Advanced Microeconomic Theory*. Addison-Wesley, Germany.

Judge *et al.* (1985), *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley and Son, NY

------ *et al.* (1987), *Introduction to The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley and Son, NY.

Kutner, M.H., *et al.* (2004), *Applied Linear Regression Models* 4th Ed. McGraw Hill.

Litina, Anastasia; Palivos, Theodore (2008). "Do Inada conditions imply that production function must be asymptotically Cobb–Douglas? A comment". Economics Letters. 99 *(3): 498–499. doi:10.1016/j.econlet.2007.09.035*

Mankiw, N. Gregory; Romer, David; Weil, David N. (May 1992). "A Contribution to the Empirics of Economic Growth". *The Quarterly Journal of Economics*. 107 (2): 407–437.

Nelson, Richard R, & Winter, Sydney G. (1982). *An Evolutionary Theory of Economic Change*, Harvard University Press, USA.

Revankar, Nagesh S. (1971) *A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Functions*, Econometrica Vol. 39, No. 1, pp. 61-71

Romer, David *(2011). "The Solow Growth Model". Advanced Macroeconomics (Fourth ed.). New York: McGraw-Hill. pp. 6–48.*

Shone, R., (2002)., *Ecocomic Dynamics*, Cambridge University Press, NY

Solow, Robert M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics.* 70 (1): 65–94 doi:10.2307/1884513. hdl:10338.dmlcz/143862. JSTOR 1884513. Pdf.

Stachurski, J. (2009), *Economic Dynamics Theory and Computatioin*, The MIT Press, Cambridge, MA.

Sterman, John.D. (2000), Business Dynamics System Thinking and Modelling for a Complex World, McGraw Hill Higher Education.

Tinbergen, Jan (1939), *Statistical Testing of Business Cycle Theories*, League of Nations, *Geneva.* https://discovered.ed.ac.uk › discovery › fulldisplay

Walsh, Vivian (1987), "Models and theory", The New Palgrave: A Dictionary of Economics, vol. 3, Stockton Press, New York

Zhelobodko, E. et al, (2012), Note on Monopolistic Competition: Beyond The Constant Elasticity of Substitution, *Econometrica* Vol. 80, No.6 Nov. 2012 2765-2784